2. Merkblatt

Freie Kontinuumsschwingungen

Vorgehen (nach Bernoulli):

1. Aufstellen der Bewegungsdifferentialgleichung
2. Separationsansatz $\rightarrow$ zwei gewöhnliche DGLn
3. Finde (oder kenne) die allgemeinen Lösungen der gewöhnlichen DGLn
4. Anpassen der allg. Lösung der Orts-DGL an die Randbedingungen liefert die Frequenzgleichung
5. Auswerten der Lösung der Orts-DGL für einzelne Frequenzen liefert die Eigenformen
6. Bei Bedarf: Anpassen der Gesamtlösung an die Anfangsbedingungen

Saiten, Stäbe und Torsionsstäbe

Saitenschwingungen, Longitudinal- und Torsionsschwingungen von Stäben werden alle durch die Wellengleichung beschrieben, allerdings sind die Verformungsgrößen andere und die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten definieren sich unterschiedlich.

$$\ddot{\xi} = c^2 \xi'' \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{1}$$

Saite	$\xi = w(x,t)$ $c^2 = \frac{S}{\mu}$	Querauslenkung der Saite mit S als Vorspannkraft und μ als Massenbelegung
Stab	$\xi = u(x,t)$ $c^2 = \frac{E}{\rho}$	Longitudinalverschiebung des Stabes mit E als Elastizitätsmodul und ρ als Dichte
Torsionsstab	$\xi = \theta(x,t)$ $c^2 = \frac{G}{\rho}$	Torsionswinkel des Stabes mit G als Schubmodul und ρ als Dichte

Die gewöhnlichen DGLn und ihre allgemeinen Lösungen sind auf Merkblatt 1 angegeben.

Balken

Die Balkenbiegedifferentialgleichung lautet

$$\ddot{w}(x,t) = -\frac{EI}{\rho A} w''''(x,t) \tag{2}$$

Nach Separation mit Hilfe des Ansatzes $w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ ergeben sich die gewöhnlichen DGLn:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad , \quad X'''' - \underbrace{\frac{\omega^2 \rho A}{EI}}_{=:\kappa^4} X = 0 \tag{3}$$

Die Orts-DGL ist 4. Ordung, daher ergibt sich eine viergliedrige allgemeine Lösung mit vier Konstanten. Zur Bestimmung der Frequenzgleichung werden vier Randbedingungen benötigt.

$$X(x) = A\cos\kappa x + B\sin\kappa x + C\cosh\kappa x + D\sinh\kappa x \tag{4}$$