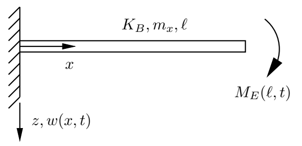
Plenarübung

Aufgabe 44

Ein Kragbalken wird wie abgebildet durch ein Moment am rechten Rand belastet. Man berechne die Übertragungsfunktion des Systems an der Stelle, wo das Moment angreift.
Eingangsgröße: $M_E(x=\ell,t) = M_0\cos(\Omega t)$, Ausgangsgröße: $w'(x=\ell,t)$



Geg.: K_B, m_x, ℓ, M_0

Gesucht ist das Übertragungsverhalten des Systems zwischen Anregungsmoment $M(t)$ und dem Endbiegewinkel $w'(l,t)$, gesucht ist also ein Zusammenhang in der Form:

$$w'(l,t) = ?\cdot M(t) \tag{1}$$

Das Fragezeichen bezeichnen wir als Übertragungsfunktion V.
Bewegungsdifferentialgleichung:

$$\ddot{w}(x,t) + \frac{EI}{\rho A} w''''(x,t) = 0 \tag{2}$$

Gleichtaktansatz:

$$w(x,t) = W(x)\cdot\cos\Omega t \tag{3}$$

Dieser Ansatz führt auf die DGL im Ort

$$W'''' - \underbrace{\frac{\Omega^2\rho A}{EI}}_{=:\lambda^4} W = 0 \tag{4}$$

Die allgmeine Lösung (und ihre Ableitungen) dieser gewöhnlichen DGL lauten

$$W(x) = A^*\cos\lambda x + B\sin\lambda x + C\cosh\lambda x + D\sinh\lambda x \tag{5}$$

$$W'(x) = \lambda\left(-A^*\sin\lambda x + B\cos\lambda x + C\sinh\lambda x + D\cosh\lambda x\right)$$
$$W''(x) = \lambda^2\left(-A^*\cos\lambda x - B\sin\lambda x + C\cosh\lambda x + D\sinh\lambda x\right)$$
$$W'''(x) = \lambda^3\left(A^*\sin\lambda x - B\cos\lambda x + C\sinh\lambda x + D\cosh\lambda x\right)$$

Randbedingungen:
An der linken Seite ist der Balken fest eingespannt.

$$w(0,t) = 0 \quad\Rightarrow\quad W(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad A^* + C = 0 \tag{6}$$
$$w'(0,t) = 0 \quad\Rightarrow\quad W'(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad B + D = 0 \tag{7}$$

Das rechte Ende ist Querkraft-frei und mit dem oszillierenden Einzelmoment belastet.

$$Q(l,t) = 0 \Rightarrow w'''(l,t) = 0 \Rightarrow W'''(l) = 0$$
$$\Rightarrow A^*\sin\lambda l - B\cos\lambda l + C\sinh\lambda l + D\cosh\lambda l = 0 \tag{8}$$
$$M_b(l,t) = M(t) \Rightarrow -EIw''(l,t) = M(t) \Rightarrow W''(l) = -\frac{M_0}{EI}$$
$$\Rightarrow -A^*\cos\lambda l - B\sin\lambda l + C\cosh\lambda l + D\sinh\lambda l = -\frac{M_0}{\lambda^2 EI} \tag{9}$$

Berechnung der Konstanten
Dieses 4×4 Gleichungssystem muss nun für die unbekannten Konstanten gelöst werden. Der Parameter λ ist keine unbekannte Größe, er beinhaltet die Systemparameter und die (ebenfalls bekannte) Erregerfrequenz Ω. Es werden die Abkürzungen verwendet:

$$\cos\lambda l = \mathrm{cl} \quad \sin\lambda l = \mathrm{sl}$$
$$\cosh\lambda l = \mathrm{chl} \quad \sinh\lambda l = \mathrm{shl}$$

Aus (6) und (7) in (8) ergibt sich

$$C(\mathrm{shl}-\mathrm{sl}) + D(\mathrm{cl}+\mathrm{chl}) = 0$$
$$\Rightarrow C = -D\frac{\mathrm{cl}+\mathrm{chl}}{\mathrm{shl}-\mathrm{sl}} \tag{10}$$

Aus (6) und (7) in (9) ergibt sich

$$C(\mathrm{cl}+\mathrm{chl}) + D(\mathrm{sl}+\mathrm{shl}) = -\frac{M_0}{\lambda^2 EI} \tag{11}$$

Und mit Hilfe der Identitäten

$$\mathrm{sl}^2 + \mathrm{cl}^2 = 1 \tag{12}$$
$$\mathrm{chl}^2 - \mathrm{shl}^2 = 1 \tag{13}$$

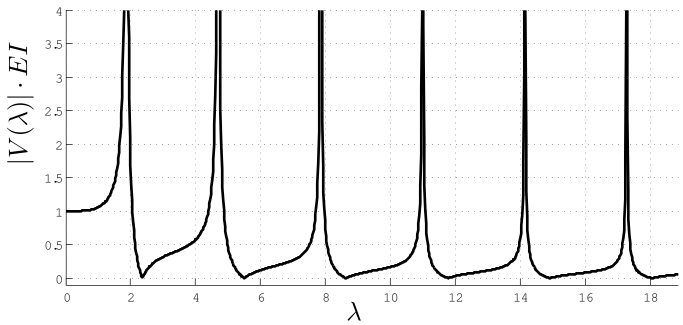
folgt aus (10) in (11) endlich

$$D = \frac{M_0}{2\lambda^2 EI}\frac{\mathrm{shl}-\mathrm{sl}}{1+\mathrm{chlcl}} = -B \tag{14}$$
$$\Rightarrow C = -\frac{M_0}{2\lambda^2 EI}\frac{\mathrm{cl}+\mathrm{chl}}{1+\mathrm{chlcl}} = -A^* \tag{15}$$

Damit ist die Lösung im eingeschwungenen Zustand gefunden.
Identifikation der Übertragungsfunktion
Für den Biegewinkel am Ende des Balkens gilt

$$\begin{aligned} w'(l,t) &= W'(l)\cos\Omega t \\ &= \lambda(-A^*\mathrm{sl} + B\mathrm{cl} + C\mathrm{shl} + D\mathrm{chl})\cos\Omega t \\ &= \underbrace{-\frac{1}{\lambda EI}\frac{\mathrm{chlsl}+\mathrm{shlcl}}{1+\mathrm{chlcl}}}_{V(\lambda)}\cdot\underbrace{M_0\cos\Omega t}_{M(t)} \end{aligned} \tag{16}$$

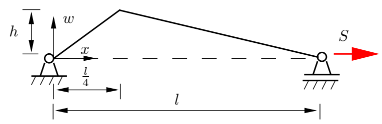
Die Übertragungsfunktion ist abhängig von λ und damit abhängig von der Anregungsfrequenz Ω. Das bedeutet, dass das System auf Anregung mit verschiedenen Frequenzen unterschiedlich reagiert. Zu sehen ist auch, dass es Anregungfrequenzen gibt, bei denen der Nenner Null und damit die Systemantwort unendlich groß wird. Diese Frequenzen nennen sich auch Resonanzfrequenzen. Oft wird nur der Betrag der Übertragungsfunktion betrachtet, da die Richtung der Verformung nicht von Interesse ist.



Tutorium

Aufgabe 8

Eine beidseitig eingespannte Saite der Länge l (Dichte ρ, Querschnittsfläche A) ist um die Kraft S vorgespannt. Nach Einleitung der folgenden Anfangsbedingungen führt sie freie, ungedämpfte, rein transversale Schwingungen aus:



$\dot{w}(x, t = 0) = 0$

$w(x, t = 0) = \begin{cases} 4\frac{h}{l}x & \text{für } 0 \le x < \frac{l}{4} \\ \frac{4}{3}\left(1 - \frac{x}{l}\right)h & \text{für } \frac{l}{4} \le x \le l \end{cases}$

Geg.: ρ, A, S, l, h

(a) Bestimmen Sie die D'ALEMBERTsche Lösung der Wellengleichung, und zeichnen Sie die Auslenkungen der Saite zu den Zeitpunkten: $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{8}T$, $t_2 = \frac{1}{4}T$, $t_3 = \frac{3}{8}T$, ... über eine volle Periode T.

(b) Lösen Sie die Wellengleichung mit Hilfe des Produktansatzes von Bernoulli. Passen Sie die Lösung an die Rand- und Anfangsbedingungen an.

(c) Zeichnen Sie die ersten vier Eigenschwingungsformen und die Auslenkung der Saite aus der gewichteten Überlagerung dieser vier Eigenformen für den Zeitpunkt $t = 0$.

(d) Zeigen Sie, dass die Lösung nach BERNOULLI die Fourierdarstellung der D'ALEMBERTschen Lösung ist.

Das Problem wird durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{17}$$

beschrieben. Zur Lösung soll der Ansatz von D'ALEMBERT

$$w(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{18}$$

benutzt werden. Dieser hat die zeitliche Ableitung

$$\begin{aligned} \dot{w}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} w(x, t) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial(x - ct)} \frac{\partial(x - ct)}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial(x + ct)} \frac{\partial(x + ct)}{\partial t} \\ &= -cf_1'(x - ct) + cf_2'(x + ct). \end{aligned} \tag{19}$$

Dabei sind

$$f_1' := \frac{\partial f_1}{\partial(x - ct)} \text{und} \tag{20}$$

$$f_2' := \frac{\partial f_2}{\partial(x + ct)}. \tag{21}$$

Die Funktionen f_1 und f_2 werden aus den Anfangsbedingungen

$$w(x, t = 0) = \left\{ \begin{array}{ll} 4\frac{h}{l}x, & 0 \le x < \frac{l}{4} \\ \frac{4}{3}\left(1 - \frac{x}{l}\right)h, & \frac{l}{4} \le x \le l \end{array} \right\} =: w_A(x), \tag{22}$$

$$\dot{w}(x, t = 0) = 0 \tag{23}$$

bestimmt.

Aus (19) → (23) erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{w}(x, t) = \left[-cf_1'(x - ct) + cf_2'(x + ct)\right]_{t=0} = 0 \\ \Rightarrow f_1'(x) - f_2'(x) = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

und durch Integration über x:

$$f_1(x) - f_2(x) = 2A. \tag{25}$$

Dabei ist $2A$ eine Integrationskonstante.
Analog ergibt sich aus (18) → (22):

$$\begin{aligned} w(x, t = 0) &= \left[f_1(x - ct) + f_2(x + ct)\right]_{t=0} \\ &= f_1(x) + f_2(x) = w_A(x). \end{aligned} \tag{26}$$

Aus (25) + (26) folgt

$$f_1(x) = \frac{1}{2} w_A(x) + A. \tag{27}$$

und analog aus (26) - (25)

$$f_2(x) = \frac{1}{2} w_A(x) - A. \tag{28}$$

Setzt man nun (27) und (28) in (18) ein, so erhält man

$$w(x, t) = \frac{1}{2}\left[w_A(x - ct) + w_A(x + ct)\right], \ 0 \le x - ct, x + ct \le l. \tag{29}$$

Die Anfangsauslenkung w_A spaltet sich in zwei Wellen mit halber Amplitude auf, die in entgegengesetzte Richtungen die Saite entlang laufen. Diese Lösung ist nur gültig, solange die Wellen die Ränder nicht berühren. Eine allgemeine Lösung erhält man durch Auswertung der Randbedingungen. Die Saite ist an beiden Ende eingespannt, daher gilt:

$$w(x = 0, t) = 0 \quad \text{und} \quad w(x = l, t) = 0. \tag{30}$$

Diese Randbedingungen werden erfüllt, wenn an den Rändern Wellen gleicher Form aber mit umgekehrten Vorzeichen und entgegengesetzter Laufrichtung reflektiert werden. Das wird erreicht, wenn die Lösung periodisch mit wechselndem Vorzeichen auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Wenn z.B. $[-\frac{l}{4}, \frac{7l}{4}]$ als Grundintervall angesehen wird, so lautet die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} w(x, t) = \frac{2h}{3l} &\left\{ \begin{array}{ll} 3(x - ct), & -\frac{l}{4} \le x - ct + 2nl < \frac{l}{4} \\ l - (x - ct), & \frac{l}{4} \le x - ct + 2nl \le \frac{7l}{4} \end{array} \right\} + \\ + \frac{2h}{3l} &\left\{ \begin{array}{ll} 3(x + ct), & -\frac{l}{4} \le x + ct + 2nl < \frac{l}{4} \\ l - (x + ct), & \frac{l}{4} \le x + ct + 2nl \le \frac{7l}{4} \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{31}$$

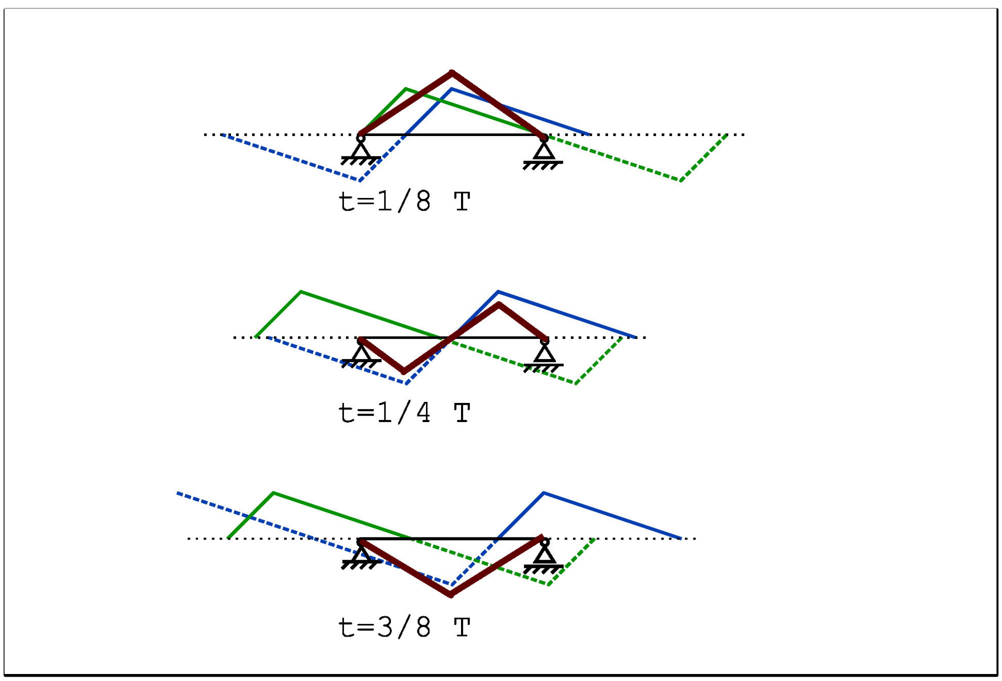
Dabei gilt $n \in \mathbb{Z}$. Die Saite schwingt mit der Schwingungsdauer

$$T = \frac{2l}{c}. \tag{32}$$

⇒ Gesamtlösung:

$$w(x,t) = \begin{cases} \frac{2h}{\ell}(x+ct) & -\frac{\ell}{4} \le x+2\ell n+ct \le \ell/4 \\ \frac{2}{3}\frac{h}{\ell}(\ell-(x+ct)) & \ell/4 \le x+2\ell n+ct \le 7/4\,\ell \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} \frac{2h}{\ell}(x-ct) & -\frac{\ell}{4} \le x+2\ell n-ct \le \ell/4 \\ \frac{2}{3}\frac{h}{\ell}(\ell-(x-ct)) & \ell/4 \le x+2\ell n-ct \le 7/4\,\ell \end{cases}$$



b) $w(x,t) = X(x)\cdot T(t)$

$$T(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$X(x) = C\cos\frac{\omega}{c}x + D\sin\frac{\omega}{c}x$$

ω - Eigenkreisfrequenz

Randbedingungen:

$w(0,t) = 0 \quad (1) \quad \Rightarrow X(0) = 0$

$w(l,t) = 0 \quad (2) \quad \Rightarrow X(l) = 0$

$$(1) \quad X(0) = C\cos(0) + D\cancel{\sin(0)}^{0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 0}$$

$$(2) \quad X(l) = D\sin\left(\frac{\omega}{c} l\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\omega}{c} l\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{c} l = n\pi \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{n\pi c}{l}}$$

$\Rightarrow$ Gesamtlösung

$$w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c} x\right)\left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\omega_n}{c} x\right)\left(\bar{A}_n \cos\omega_n t + \bar{B}_n \sin\omega_n t\right)$$

Anfangsbedingungen:

(1) $\dot{w}(x,t=0) = 0$

$$\dot{w}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)\left(-\bar{A}_n \sin\omega_n t + \bar{B}_n \cos\omega_n t\right)$$

$$\dot{w}(x,t=0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)\bar{B}_n = 0$$

$$\Rightarrow \bar{B}_n = 0$$

(2) $w(x,t=0) = w_A(x)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)\bar{A}_n$$

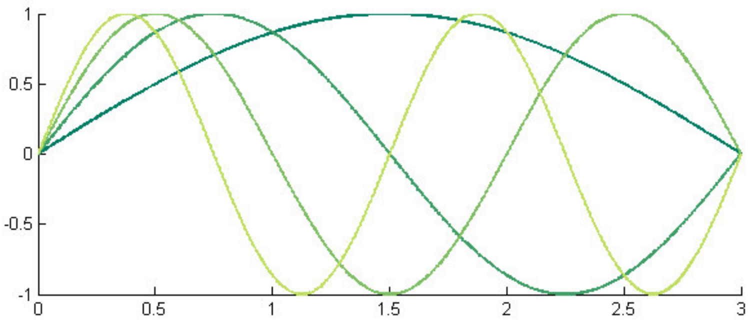
$\bar{A}_n$ sind die Koeffizienten der Fourierreihenentwicklung! $\rightarrow$ Mathe.

$\Rightarrow$ Gesamtlösung:

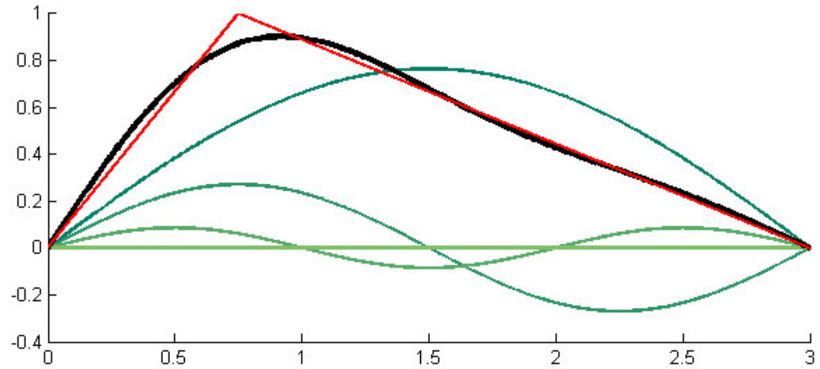
$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \cos(\omega_n t)\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)$$

Zu Aufgabenteil c)

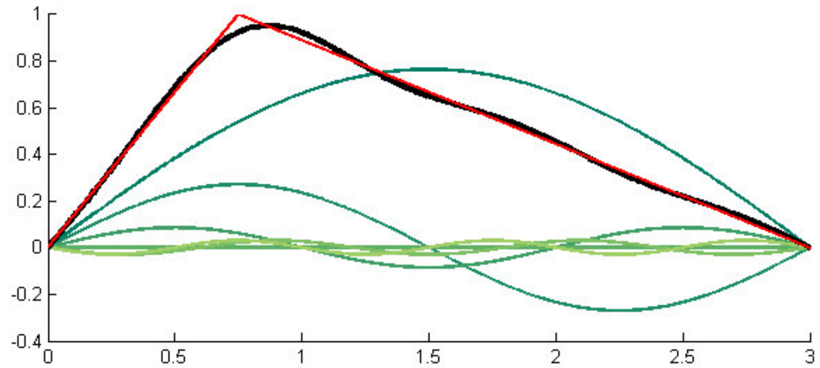
Eigenformen 1-4



Überlagerung der ersten vier Eigenformen



Überlagerung der ersten sechs Eigenformen



Überlagerung der ersten fünfzehn Eigenformen