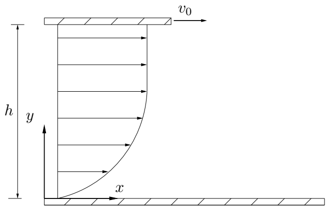
Plenarübung

Aufgabe 82

Eine ebene Platte wird in einem Abstand h über einer festen Platte wie skizziert mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 verschoben. Dabei stellt sich eine ebene Parallelströmung des Newtonschen Fluides ein. Vorausgesetzt sei eine stationäre, volumenkraftfreie, laminare Strömung.



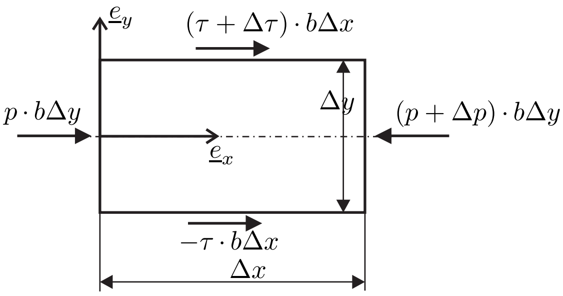
(a) Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil der Strömung zwischen den Platten, wenn es sich um ein inkompressibles Fluid handelt und die Platte eine genügend große Breite b besitzt, um diese Schichtenströmung zu ermöglichen.

(b) Diskutieren Sie das Ergebnis in Abhängigkeit des Druckgradienten.

Geg.: h, v_0, η, b

In der Aufgabe wird eine schleichende Strömung behandelt, d.h. die Trägheitsterme sind vernachlässigbar. ($m\ddot{x} = 0$ oder $\Theta\ddot{\varphi} = 0$)

(a) 1. Weg
Freischnitt eines Masseelements



$$p \cdot \Delta y b - (p + \Delta p)\Delta y b + (\tau + \Delta\tau)\Delta x \cdot b - \tau b\Delta x = 0 \quad (1)$$

$$\Delta p \Delta y = \Delta\tau\Delta x \quad (2)$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta\tau}{\Delta y} \quad (3)$$

Grenzübergang:

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y}} \quad (4)$$

NEWTONsches Schubspannungsgesetz:

$$\tau = \eta\frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta\frac{\partial^2 v}{\partial^2 y^2} \quad (6)$$

2. Weg NAVIER-STOKES-Gleichung:

$$\rho\frac{d\underline{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \eta\Delta\underline{v} + \rho g \quad (7)$$

Da schleichende Strömung (s.o.) und keine Gewichtskräfte:

$$\operatorname{grad} p = \eta\Delta\underline{v} \quad (8)$$

Das Geschwindigkeitsprofil ist eine Funktion von y, die Geschwindigkeit geht in $\underline{e}_x$-Richtung

$$\underline{v} = v(y)\underline{e}_x \quad (9)$$

Auswerten von (8) mit (9):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial y} &= 0\\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow p = p(x) \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} \quad (12)$$

$$\Rightarrow v(y) = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y^2 + c_1 y + c_2 \quad (13)$$

Mit den Randbedingungen:

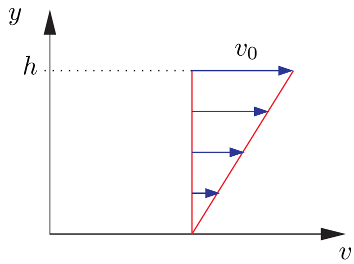
$$v(0) = 0 \qquad \Rightarrow c_2 = 0 \quad (14)$$

$$v(h) = v_0 \qquad \Rightarrow c_1 = \frac{v_0}{h} - \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}h \quad (15)$$

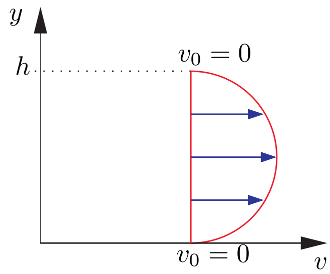
$$\Rightarrow v(y) = \frac{1}{2\eta} \cdot (y - h)y + \frac{v_0}{h}y \quad (16)$$

(b) Geschwindigkeitsverläufe

$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$



$\frac{\partial p}{\partial x} < 0$, $v_0 = 0$



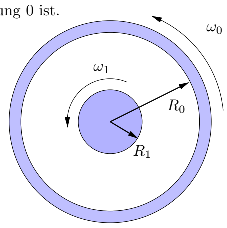
Aufgabe 76

Ein inkompressibles Newtonsches Fluid (Dichte ρ, dynamische Viskosität η) befindet sich zwischen zwei unendlich langen Zylindern (Radien R_0 und R_1). Der äußere Zylinder rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_0, der innere Zylinder mit ω_1. Für den untersuchten stationären Zustand soll angenommen werden, dass die Geschwindigkeit in axialer Richtung 0 ist.

(a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $u_\varphi = u_\varphi(r)$ des Fluids.
Hinweis: Das Materialgesetz lautet für das vorliegende Problem

$$\tau_{r\varphi} = \eta r\frac{d}{dr}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right) \quad .$$

(b) Wie groß ist der Druck $p = p(r)$?



Geg.: ω_0, ω_1, R_0, R_1, η, ρ

(a) Aus dem Materialgesetz erhält man durch Anwendung der Quotienten-Regel:

$$\begin{aligned}\tau_{r\varphi} &= \eta r\frac{r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - u_\varphi}{r^2}\\ &= \eta\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right)\end{aligned} \quad (17)$$

Zur Herleitung der Geschwindigkeitsverteilung betrachten wir einen aus dem Fluid herausgeschnitten Hohlzylinder. Damit die Strömung stationär ist, muss die Summe der am Hohlzylinder angreifenden Momente um die Rotationsachs identisch Null sein. Insbesondere müssen sich also die aus den Schubspannung resultierenden Momente M_i bzw. M_a an der Innen- und Außenwand des Hohlzylinders aufheben,

$$M_i = M_a. \tag{18}$$

Betrachten wir nun den inneren Zylinder und einen Teil des Fluids als Zylinder mit Radius r, $R_1 \leq r \leq R_0$. Dann beträgt das auf die Mantelfläche A dieses Zylinders wirkende Moment infolge der Schubspannungen:

$$M(r) = \tau A r, \tag{19}$$

bzw. mit (17) und $A = 2\pi r l$, wobei l die unbekannte Höhe des Zylinders sein soll,:

$$M(r) = 2\pi\eta\, l r^2 \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right). \tag{20}$$

Gleichung (18) bedeuten nun gerade, dass dieses Moment $M(r)$ nicht vom Radius r abhängt sondern konstant ist. Damit folgt aus (20), dass

$$r^2 \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - r u_\varphi = c. \tag{21}$$

mit einer noch unbekannten Konstante c gelten muss. [1]

Da die Strömung als stationär angenommen werden soll, kann die Geschwindigkeit u_φ außer vom Radius r, von keiner weiteren Variable abhängen. Wir werden daher im Folgenden die Ableitung $\frac{d}{dr}$ statt der partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial r}$ schreiben und diese (wie bei Ableitungen nach dem Ort allgemein üblich) durch Striche gekennzeichnet. Gleichung (21) lässt sich dann schreiben als:

$$u_\varphi' - \frac{1}{r} u_\varphi = \frac{c}{r^2}. \tag{22}$$

Das ist eine lineare DGL 1. Ordnung, die sich mit der Methode des integrierenden Faktors[2] lösen lässt.

Mit $a := -\frac{1}{r}$ und $b := \frac{c}{r^2}$ gilt:

$$u_\varphi = e^{-\int a dr} \left[\int b e^{\int a dr} dr + c_1\right], \tag{23}$$

also:

$$\begin{aligned} u_\varphi(r) &= e^{-\int -\frac{1}{r} dr} \left[\int \frac{c}{r^2} e^{\int -\frac{1}{r} dr} dr + c_1\right] \\ &= e^{\ln r} \left[\int \frac{c}{r^2} e^{-\ln r} dr + c_1\right] \\ &= r \left[\int \frac{c}{r^3} dr + c_1\right] \\ &= c_1 r + \frac{c_2}{r}. \end{aligned} \tag{24}$$

[1] Differentation dieser Gleichung führt auf die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2{}^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_\varphi = 0$, welche man auch aus der Navier-Stokes-Gleichung für dieses Problem erhält.

[2] Vgl. z.B. Bronstein(5. Auflage), S. 507

Die Integrationskonstanten sind aus den Randbedingungen (Haftung an festen Oberflächen) zu bestimmen:

$$u_\varphi(r = R_1) = \omega_1 R_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 R_1^2 + c_2 = \omega_1 R_1, \tag{25}$$

$$u_\varphi(r = R_0) = \omega_0 R_0 \quad \Rightarrow \quad c_1 R_0^2 + c_2 = \omega_0 R_0. \tag{26}$$

Aus (25)-(26) bzw. (25) $\cdot R_0^2$ - (26) $\cdot R_1^2$ folgen

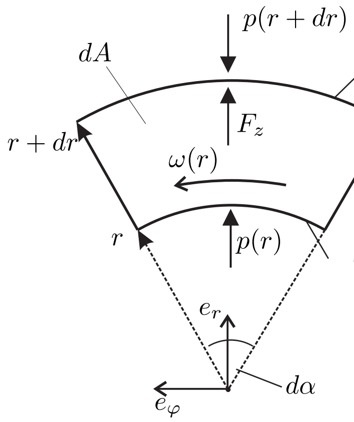
$$c_1 = \frac{\omega_0 R_0^2 - \omega_1 R_1^2}{R_0^2 - R_1^2} \quad \text{und} \tag{27}$$

$$c_2 = \frac{R_0^2 R_1^2 (\omega_1 - \omega_0)}{R_0^2 - R_1^2}. \tag{28}$$

Somit ist die Geschwindigkeit des Fluids:

$$u_\varphi(r) = \frac{\omega_0 R_0^2 - \omega_1 R_1^2}{R_0^2 - R_1^2} r + \frac{R_0^2 R_1^2 (\omega_1 - \omega_0)}{R_0^2 - R_1^2} \frac{1}{r}. \tag{29}$$

(b)



Zur Bestimmung der Druckverteilung $p(r)$ betrachten wir das Kräftegleichgewicht am dargestellten Massenelement der Dicke dz. Als Bezugssystem verwenden wir das mitdrehende $e_r - e_\varphi$-System. Da dieses nicht-inertial ist, muss eine Zentrifugalkraft F_z berücksichtigt werden. Außerdem gehen wir davon aus, dass die Druckkräfte auf Innen- und Außenfläche (dA_i bzw. dA_a) als parallel zur e_r-Achse angesehen werden können. Da es sich um eine stationäre Strömung handelt, müssen sich die Kräfte in e_r-Richtung aufheben:

$$F_z = p(r + dr) dA_a - p(r) dA_i. \tag{30}$$

Dabei sind im Einzelnen:

$$\begin{aligned} F_z &= \omega^2 r dm \\ &= \omega^2 r \rho \pi \left[(r + dr)^2 - r^2\right] \frac{d\alpha}{2\pi} dz \\ &= \omega^2 \rho \left[r^2 + \frac{1}{2} r dr\right] dr d\alpha dz, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} dA_i &= 2\pi r dz \frac{d\alpha}{2\pi} \\ &= r d\alpha dz, \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} dA_a &= 2\pi (r + dr) dz \frac{d\alpha}{2\pi} \\ &= (r + dr) d\alpha dz. \end{aligned} \tag{33}$$

Eingesetzt in (30) ergibt sich somit der Ausdruck

$$\omega^2\rho\left[r^2+\frac{1}{2}rdr\right]drd\alpha dz = p(r+dr)(r+dr)d\alpha dz - p(r)rd\alpha dz$$
$$\Leftrightarrow \omega^2\rho\left[r^2+\frac{1}{2}rdr\right]dr = \left[p(r+dr)-p(r)\right]r + p(r+dr)dr. \tag{34}$$

Die Glieder höherer Ordnung vernachlässigen wir und erhalten dann die Gleichung[3]

$$\omega^2\rho r dr = p(r+dr)-p(r)$$
$$\Leftrightarrow p' = \omega^2\rho r. \tag{35}$$

Mit der Beziehung $\omega = \frac{u_\varphi}{r}$ und (24) folgt daraus

$$p' = \frac{\rho r}{r^2}\left(c_1 r + \frac{c_2}{r}\right)^2$$
$$= \rho\left(c_1^2 r + \frac{2c_1c_2}{r} + \frac{c_2^2}{r^3}\right) \tag{36}$$

und nach Integration

$$p(r) = \int \rho\left(c_1^2 r + \frac{2c_1c_2}{r} + \frac{c_2^2}{r^3}\right)dr$$
$$p(r) = \frac{\rho}{2}\left(c_1^2r^2 + 4c_1c_2\ln r - c_2^2\frac{1}{r^2} + c_3\right). \tag{37}$$

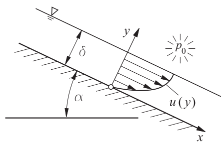
c_1 und c_2 sind die Konstanten gemäß den Gleichungen (27) und (28), c_3 muss durch eine weitere Randbedingung (z.B. Vorgabe eines Druckes am äußeren Zylinder) bestimmt werden.

[3]Auch diese Beziehung lässt sich unmittelbar aus der Navier-Stokes-Gleichung herleiten.

Tutorium

Aufgabe 80

Längs einer unter $\alpha = 60^o$ gegen die Waagerechte geneigten Platte der Breite $b = 0{,}5$m fließt eine konstante Ölmenge $Q =$ 1l/s als dünner Film der Stärke δ.



Annahme: Es stellt sich ein in x-Richtung konstantes Geschwindigkeits- und Druckprofil ein.

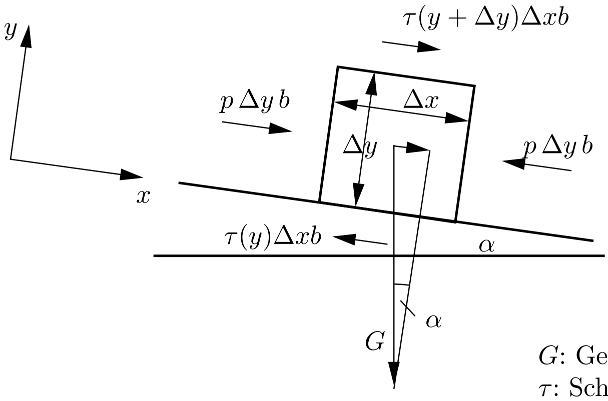
Man berechne

(a) die Geschwindigkeit im Film und

(b) die Filmdicke δ ($\nu = 0{,}436\cdot10^{-4}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$).

a) Geschwindigkeitsverteilung:

Aus der Impulsbilanz folgt das Kräftegleichgewicht wegen $u =$ konst. $\Rightarrow$ keine Beschleunigung. In x-Richtung an einem beliebigen Volumenelement $dx\,dy\,b$ (Beachte die Annahme $\frac{dp}{dx} = 0$):



G: Gewichtskraft
τ: Schubspannung

$$0 = G\sin\alpha + \tau(y+\Delta y)\Delta x\,b - \tau(y)\Delta x\,b \tag{38}$$

mit $G = \rho g b\,\Delta x\,\Delta y$:

$$\rho g\,\Delta x\,\Delta y\,b\sin\alpha + \tau(y+\Delta y)\Delta x\,b - \tau(y)\Delta x\,b = 0 \tag{39}$$
$$-\rho g\sin\alpha = \frac{\tau(y+\Delta y)-\tau(y)}{\Delta y} \xrightarrow{\Delta y\to 0} \frac{d\tau}{dy} \tag{40}$$

Mit dem Newtonschen Reibungsgesetz

$$\tau = \eta\cdot\frac{du}{dy} \tag{41}$$

wird aus (40):

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{-\rho\cdot g}{\eta}\cdot\sin\alpha \tag{42}$$

Durch Integration erhält man:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\rho\cdot g}{\eta}\cdot\sin\alpha\cdot y + c_1 \tag{43}$$
$$u = -\frac{\rho\cdot g}{\eta}\cdot\sin\alpha\cdot\frac{y^2}{2} + c_1\cdot y + c_2 \tag{44}$$

Die Konstanten werden durch Einsetzen der Randbedingungen ermittelt:

Haftbedingung an der Wand:

$$u(y=0) = 0 \quad\Rightarrow\quad c_2 = 0 \tag{45}$$

Schubspannung an der Oberfläche = 0:

$$\tau(y=\delta)=0 \;\Rightarrow\; \frac{du}{dy}=0 \;\Rightarrow\; c_1=\frac{\rho\cdot g}{\eta}\cdot\sin\alpha\cdot\delta \qquad (46)$$

Eingesetzt in (44) ergibt sich für die Geschwindigkeitsverteilung im Film (mit $\nu=\frac{\eta}{\rho}$, ν... kinematische Zähigkeit, η... (dynamische, absolute) Zähigkeit):

$$\begin{aligned} u &= \frac{\rho\cdot g}{\eta}\sin\alpha\cdot\Big(\delta\cdot y-\frac{y^2}{2}\Big)\\ &= \frac{g\cdot\sin\alpha}{\nu}\cdot\Big(\delta\cdot y-\frac{y^2}{2}\Big) \qquad (47)\end{aligned}$$

b) Filmdicke δ:

Für die Durchflußmenge gilt:

$$Q=b\cdot\int_0^\delta u(y)dy \qquad (48)$$

mit (47):

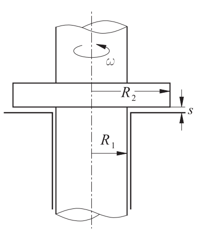
$$\begin{aligned} Q &= b\cdot\int_0^\delta\Big[\frac{g}{\nu}\cdot\sin\alpha\cdot\Big(\delta\cdot y-\frac{y^2}{2}\Big)\Big]\cdot dy \qquad (49)\\ &= \frac{b\cdot g\cdot\sin\alpha}{\nu}\cdot\Big[\frac{\delta\cdot y^2}{2}-\frac{y^3}{6}\Big]_0^\delta \qquad (50)\\ &= \frac{b\cdot g\cdot\sin\alpha}{\nu}\cdot\frac{\delta^3}{3} \qquad (51)\\ \delta &= \sqrt[3]{\frac{3\cdot Q\cdot\nu}{b\cdot g\cdot\sin\alpha}} \qquad (52)\end{aligned}$$

eingesetzt:

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt[3]{\frac{3\cdot 0{,}003\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\cdot 0{,}436\cdot 10^{-4}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}}{0{,}5\mathrm{m}\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}}} \qquad (53)\\ &= 4{,}52\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \qquad (54)\\ &= 4{,}52\ \mathrm{mm} \qquad (55)\end{aligned}$$

Aufgabe 83

Das gezeichnete Traglager wird durch einen sehr dünnen Ölfilm der Dicke s geschmiert. Die Zähigkeit des Schmieröls sei η. Bestimmt werden soll das zur Überwindung der Flüssigkeitsreibung erforderliche Drehmoment $M(\omega)$ in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit ω. Die Reibung im Radiallagerteil (zylindrischer Bereich) soll dabei vernachlässigt werden.



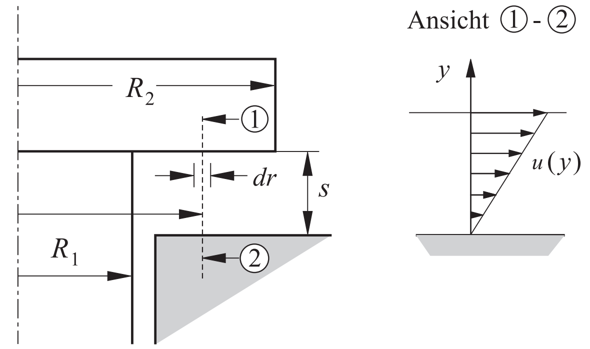
(a) Bestimme die Schubspannung $\tau(r)$ im Abstand r von der Drehachse bei vorgegebener Winkelgeschwindigkeit ω.

(b) Wie groß ist das Drehmoment $dM(r)$, das zur Überwindung der Flüssigkeitsreibung eines Kreisringes mit der infinitesimalen Breite dr erforderlich ist?

(c) Bestimme das Drehmoment $M(\omega)$!

(d) Welches Drehmoment ergibt sich für $\omega=318,3\ \mathrm{min}^{-1}$?

Geg.: $R_1=0{,}2$m; $R_2=0{,}4$m; $s=0{,}2$mm;
$\omega=318{,}3\mathrm{min}^{-1}\,\hat{=}\,n=50.66\mathrm{min}^{-1}$; $\eta=0{,}4\mathrm{Ns/m}^2$



(a) Für die Spannung $\tau(r)$ gilt nach dem Newtonschen Reibungsgesetz (Couette-Strömung ohne Druckgradient):

$$\tau(r)=\eta\cdot\frac{du}{dy}=\eta\cdot\frac{\Delta u}{\Delta y}=\eta\cdot\frac{u_{\mathrm{Welle}}(r)}{s} \qquad (56)$$

mit

$$u_{\mathrm{Welle}}(r)=r\cdot\omega \qquad (57)$$

Damit folgt:

$$\tau(r)=\eta\cdot\frac{r\cdot\omega}{s} \qquad (58)$$

(b) Für das Drehmoment dM des Kreisringes mit dem Radius r und der Breite dr gilt:

$$dM=\tau(r)\cdot r\cdot dA \qquad (59)$$

Mit der Fläche des Kreisringes

$$dA=2\pi\cdot r\cdot dr \qquad (60)$$

und Gleichung (58) wird daraus

$$dM=\frac{2\pi\eta\omega}{s}r^3dr\ . \qquad (61)$$

(c) Das Gesamtdrehmoment ergibt sich daraus durch Integration:

$$\begin{aligned} M &= \int_{R_1}^{R_2}dM \qquad (62)\\ &= \frac{2\pi\cdot\eta\cdot\omega}{s}\cdot\int_{R_1}^{R_2}r^3dr \qquad (63)\\ &= \frac{2\pi\cdot\eta\cdot\omega}{s}\cdot\Big(\frac{R_2^4-R_1^4}{4}\Big) \qquad (64)\\ &= \frac{\pi\cdot\eta\cdot\omega}{2s}\cdot\big(R_2^4-R_1^4\big) \qquad (65)\end{aligned}$$

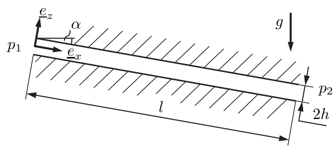
(d) Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\pi\cdot 0{,}4\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^2}\cdot 318{,}3\frac{1}{\mathrm{min}}\cdot\frac{1\mathrm{min}}{60\mathrm{s}}\Big[(0{,}4\mathrm{m})^4-(0{,}2\mathrm{m})^4\Big]}{2\cdot 0{,}0002\mathrm{m}}\\ &\approx 400\mathrm{Nm}\end{aligned}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 79

Ein inkompressibles, Newtonsches Fluid (Dichte ρ, dynamische Viskosität η) fließt in $\underline{e}_x$-Richtung durch einen dünnen Spalt (Dicke $2h$, Länge l). Senkrecht zur Zeichenebene hat der Spalt die Breite b mit $b >> h$. Am linken Ende des Spalts herrscht der Druck p_1, am rechten Ende p_2. Im Spalt stellt sich eine stationäre, laminare Strömung ein. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass die Strömungsgeschwindigkeit v nur von z und der Druck p nur von x abhängen.
Geg.: $\eta, \rho, \alpha, g, l, h, p_1, p_2$

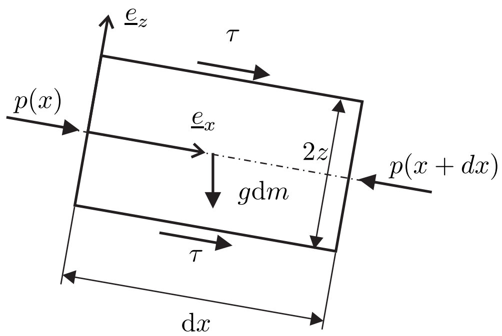


(a) Schneiden Sie ein Volumenelement des Fluids frei und ermitteln Sie daran das Strömungsprofil $v(z)$ im Spalt und die maximale Geschwindigkeit v_0.
Hinweis: Verwenden Sie ein Volumenelement, welches in $\underline{e}_z$-Richtung endlich breit ist und symmetrisch zur $\underline{e}_x$-Achse liegt. Überlegen Sie, was das für die Schubspannungen bedeutet.

(b) Bestimmen Sie den Volumenstrom Q durch den Spalt.

(c) Angenommen, das Fluid wäre reibungsfrei. Wie groß müsste die Strömungsgeschwindigkeit $\bar{v}$ im Vergleich zur maximalen Geschwindigkeit v_0 sein, damit sich derselbe Volumenstrom einstellt?

(a) Freischnitt:



Aus Symmetriegründen sind die Schubspannungen am oberen und am unteren Rand identisch. Da die Strömung stationär ist, müssen die Kräfte in $\underline{e}_x$-Richtung im Gleichgewicht sein:

$$\begin{aligned} 0 &= 2zb\,(p(x) - p(x+dx)) + gdm\sin\alpha + 2\tau b dx \\ &= -z\,(p(x+dx) - p(x)) + \rho g z \sin\alpha dx + \tau dx \\ \tau &= \frac{dp}{dx} z - \rho g z \sin\alpha. \end{aligned} \tag{66}$$

Mit

$$\tau = \eta \frac{dv}{dz} \tag{67}$$

folgt

$$\frac{dv}{dz} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\alpha\right) z \tag{68}$$

und nach Integration über z:

$$v(z) = \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\alpha\right)\frac{z^2}{2\eta} + c \tag{69}$$

Die Konstante c wird aus der Randbedingung

$$v(\pm h) = 0 \tag{70}$$

bestimmt:

$$\begin{aligned} v(h) = 0 &= \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\alpha\right)\frac{h^2}{2\eta} + c \\ \Leftrightarrow c &= -\left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\alpha\right)\frac{h^2}{2\eta}. \end{aligned} \tag{71}$$

Da die Geschwindigkeit gemäß Aufgabenstellung nicht von x abhängt, muss $\frac{dp}{dx}$ konstant bezüglich x sein und es gilt

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{l}, \quad \Delta p := p_2 - p_1. \tag{72}$$

Somit hat die Geschwindigkeit das Profil:

$$v(z) = \frac{1}{2\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right)(z^2 - h^2) \tag{73}$$

Die maximale Geschwindigkeit ist an der Stelle $z = 0$:

$$v_0 = v(z=0) = \frac{h^2}{2\eta}\left(\rho g \sin\alpha - \frac{\Delta p}{l}\right). \tag{74}$$

(b) Der Volumenstrom ist:

$$Q = \int_A v(z) dA = b\int_{-h}^{+h} v(z) dz \tag{75}$$

$$\begin{aligned} &= 2\frac{b}{2\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right)\int_0^{+h}(z^2 - h^2)dz \\ &= \frac{b}{\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right)\left[\frac{1}{3}z^3 - h^2 z\right]_0^h \\ &= \frac{2bh^3}{3\eta}\left(\rho g \sin\alpha - \frac{\Delta p}{l}\right). \end{aligned} \tag{76}$$

(c) Im Falle eines reibungsfreien Fluides wäre die notwendige Geschwindigkeit $\bar{v}$:

$$\bar{v} = \frac{Q}{A}. \tag{77}$$

Mit dem Volumenstrom aus Aufgabenteil (b) und der Querschnittsfläche $A = 2bh$ folgt

$$\bar{v} = \frac{h^2}{3\eta}\left(\rho g \sin\alpha - \frac{\Delta p}{l}\right) \tag{78}$$

und durch den Vergleich mit Gleichung (74):

$$\bar{v} = \frac{2}{3} v_0. \tag{79}$$

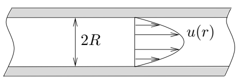
Aufgabe 81

Betrachtet wird ein Rohr (Radius R), durch das eine Newtonsche Flüssigkeit (dynamische Viskosität η) fließt. Der Volumenstrom sei Q. Es soll von laminarer Strömung ausgegangen werden. Das Geschwindigkeitsprofil $u(r)$ bei stationärer Strömung soll in den unten aufgeführten Schritten bestimmt werden.

(a) Zeigen Sie, daß die Differentialgleichung für die Strömungsgeschwindigkeit $u(r)$

$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{2\eta}\frac{dp}{dx}$$

lautet.



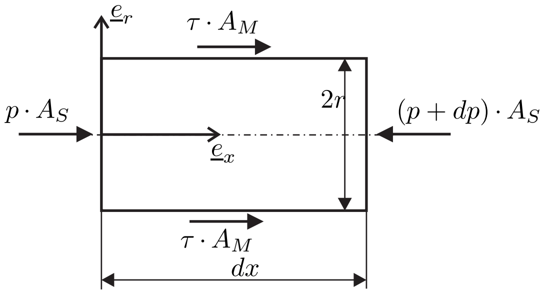
(b) Wie lauten die Randbedingungen?

(c) Bestimmen Sie nun das Geschwindigkeitsprofil in Abhängigkeit vom Druckgefälle.

(d) Leiten Sie schließlich eine Formel für das Geschwindigkeitsprofil $u(r)$ her, in der nur die gegebenen Größen enthalten sind.

Geg.: R, Q, η

Freischnitt eines Volumenelements (Zylinder)



Annahmen:
- schleichende Strömung $\Rightarrow \frac{dv}{t} = 0$
- Inkompressibilität
- Druck hängt nur von x ab $\Rightarrow p = p(x)$

(a)

$$m\ddot{x} = \sum F_x = 0 = \tau A_M + pA_S - (p+dp)A_S \tag{80}$$

$$\Rightarrow \tau \cdot 2\pi r \cdot x - dp\,\pi r^2 = 0 \tag{81}$$

Newtonsches-Schubspannungsgesetz

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dr} \tag{82}$$

$$\tau 2\pi r\, dx = \pi r^2\, dp \tag{83}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{r}{2}\frac{dp}{dx} \tag{84}$$

$$\Rightarrow \eta \frac{dv_x}{d_r} = \frac{r}{2}\frac{dp}{dx} \tag{85}$$

$$\frac{dv_x}{dr} = \frac{r}{2\eta}\frac{dp}{dx} \tag{86}$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta} r^2 + C \tag{87}$$

(b) Randbedingung
Haften am Rand

$$v_x(r=R) = 0 \tag{88}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta}R^2 + C \tag{89}$$

$$\Rightarrow C = -\frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta}R^2 \tag{90}$$

(c) Geschwindigkeitsprofil

$$v_x(r) = \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right) \tag{91}$$

Beachten der Bedingung $Q = \text{const.}$:

$$Q = \int_{(A)} v(r)\, dA \tag{92}$$

$$\text{mit } dA = 2\pi r\, dr \tag{93}$$

$$Q = \int_0^R \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right) 2\pi r\, dr \tag{94}$$

$$Q = \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta} 2\pi \int_0^R \left(r^3 - rR^2\right)\, dr \tag{95}$$

$$Q = \frac{dp}{dx}\frac{\pi}{2\eta}\left[\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{2}R^2 r^2\right]_0^R \tag{96}$$

$$Q = \frac{dp}{dx}\frac{\pi}{2\eta}\left[\frac{1}{4}R^4 - \frac{1}{2}R^4\right] \tag{97}$$

$$Q = -\frac{dp}{dx}\frac{\pi}{8\eta}R^4 \tag{98}$$

(d) Druckgradient $\frac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8\eta Q}{\pi R^4} \tag{99}$$

$$\Rightarrow v_x(r) = -\frac{2Q}{\pi R^4}\left(r^2 - R^2\right) \tag{100}$$

$$\Rightarrow v_x(r) = \frac{2Q}{\pi R^2}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \tag{101}$$