Plenarübung

Aufgabe 63

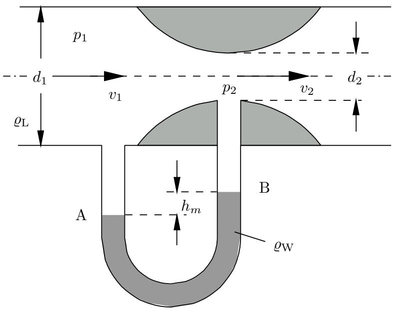
Ein Hochofengebläse drückt Luft (Dichte ϱ_L) mit dem Druck p_1 in eine Rohrleitung vom Durchmesser d_1. Der Volumenstrom Q soll durch eine einfache Druckablesung kontrolliert werden. Zu diesem Zweck ist in die Leitung eine Verengung mit einem U-Rohr-Manometer eingebaut (Dichte der Flüssigkeit ϱ_W).

(a) Berechnen Sie den Volumenstrom Q als Funktion der im Manometer angezeigten Höhendifferenz h_m bei vorgegebenen Durchmessern d_1 und d_2.

(b) Berechnen Sie die Empfindlichkeit

$$S_Q = \frac{dh_m}{dQ}$$

für das untersuchte Volumenstrommeßgerät. Zeichnen Sie die Empfindlichkeit S_Q unter Berücksichtigung charakteristischer Werte in einem Diagramm als Funktion des Volumenstroms Q.



Gegeben: ϱ_W, ϱ_L, p_1, d_1, d_2, g, reibungsfreie, inkompressible Strömung

(a) Kontinuitätsgleichung:

$$v_1 \cdot \pi \frac{d_1^2}{4} = v_2 \cdot \pi \frac{d_2^2}{4} = Q \tag{1}$$

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} \; (*) \tag{2}$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \tag{3}$$

Bernoulligleichung:

$$\varrho_L \frac{v_1^2}{2} + p_1 = \varrho_L \frac{v_2^2}{2} + p_2 \tag{4}$$

(3) in (4)

$$\varrho_L \frac{v_2^2}{2}\left(1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right) = p_1 - p_2 \tag{5}$$

U-Rohr (hydrostatisches Grundgesetz):

$$p_1 = p_2 + \varrho_W \, g\Delta h \tag{6}$$

$$\Rightarrow \; p_1 - p_2 = \varrho_W \, g\Delta h \tag{7}$$

(7) in (5)

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \; \frac{\varrho_L}{2}\left(\frac{4Q}{\pi d_2^2}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right] = \varrho_W \, g\Delta h \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \sqrt{\frac{2g\Delta h \cdot \frac{\varrho_W}{\varrho_L}}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \tag{9}$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi d_2^2}{4}\sqrt{\frac{2g\Delta h \cdot \frac{\varrho_W}{\varrho_L}}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}} \tag{10}$$

(b)

$$S_Q = \frac{dh_m}{dQ} = \frac{16\varrho_L}{\pi^2 g \varrho_W}\left(\frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_1^4}\right) Q \tag{11}$$

Aufgabe 72

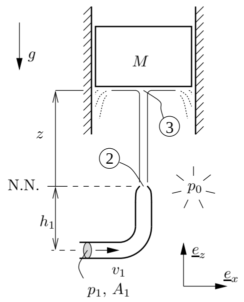
Aus einem Rohr mit der Querschnittsfläche A_1 tritt an der Stelle 2 durch eine Düse (Querschnitt A_2) ein dünner Wasserstrahl aus und trifft an der Stelle 3 auf einen senkrecht geführten Kolben der Masse M. Dort wird der Strahl horizontal abgelenkt. Der dann folgende dünn gestrichelt gezeichnete weitere Verlauf soll nicht berücksichtigt werden. Die Reibung soll vernachlässigt werden, das Wasser habe die konstante Dichte ρ.

(a) Bestimmen Sie die Düsenaustrittsgeschwindigkeit v_2!

(b) Wie groß ist die Geschwindigkeit $v_3(z)$ des Wassers nach der Umlenkung am Kolben in Abhängigkeit von der Höhe z des Kolbens? v_2 *soll jetzt gegeben sein. Bitte das Ergebnis aus Teil (??) nicht mehr einsetzen!*

(c) Geben Sie den Vektor der Kraft an, die der Wasserstrahl auf den Kolben ausübt!

(d) Bestimmen Sie die statische Ruhelage des Kolbens z.



Geg.: A_1, p_1, A_2, h_1, p_0, g, ρ

(a) Mit der Bernoulli-Gl. folgt für die Punkte 1 und 2 eines Stromfadens:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \tag{12}$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g(-h_1) = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} \tag{13}$$

Da v_1 und v_2 unbekannt sind, benötigt man eine zweite Gleichung. Nach der Kontinuitätsgleichung gilt:

$$\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2 \tag{14}$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} \tag{15}$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2\left[\frac{1}{\rho}(p_1 - p_0) - gh_1\right]}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \tag{16}$$

(b) Mit der Bernoulli-Gl. folgt für die Punkte 2 und 3 eines Stromfadens mit $p_2 = p_3 = p_0$:

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{v_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho} + gz_3 \tag{17}$$

$$\frac{v_2^2}{2} = \frac{v_3^2}{2} + gz \tag{18}$$

$$\Rightarrow v_3 = \sqrt{v_2^2 - 2gz} \tag{19}$$

(c) Die Strahlkraft $\underline{F}^S$ des Fluids auf den Kolben berechnet sich nach folgender Formel:

$$\underline{F}^S = \dot{m}\underline{v}_3 \tag{20}$$

$$\text{Konti: } \dot{m} = \rho v_2 A_2 \tag{21}$$

$$\Rightarrow \underline{F}^S = \rho v_2 A_2 \sqrt{v_2^2 - 2gz}\, \underline{e}_z \tag{22}$$

(d) In der Statischen Ruhelage z_s ist die Summe der äußeren Kräfte auf den Kolben gleich Null:

$$\underline{0} = \underline{F}^S + M\underline{g} \tag{23}$$

$$Mg\underline{e}_z = \rho v_2 A_2 \sqrt{v_2^2 - 2gz_s}\,\underline{e}_z \tag{24}$$

$$\Rightarrow z_s = \frac{1}{2g}\left[v_2^2 - \left(\frac{Mg}{\rho A_2 v_2}\right)^2\right] \tag{25}$$

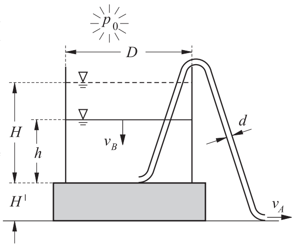
Tutorium

Aufgabe 62

Auf einem Podest der Höhe $H' = 0,5$m steht ein großes Gefäß (Durchmesser $D = 1$m), welches bis zu Höhe $H = 1$m mit Wasser gefüllt ist (vgl. nebenstehende Skizze). Dieses Gefäß wird mit Hilfe eines Schlauches (Durchmesser $d = 1$cm) nach dem Heberprinzip entleert.

(a) Wie groß ist bei reibungsloser Strömung die Wasseraustrittsgeschwindigkeit $v_A = f(h)$ am Schlauchende in Abhänigkeit von der veränderlichen Wasserhöhe h im Behälter?

(b) Wie groß ist bei reibungsloser Strömung die Entleerungszeit T des Behälters?



(a) Austrittsgeschwindigkeit v_A in Abhängigkeit vom Wasserstand h:

Aufgrund des großen Gefäßdurchmessers D ändert sich der Wasserstand h nur sehr langsam. Im gesamten System können daher die Strömungsgeschwindigkeiten wieder als annähernd konstant angesehen werden, sodaß ein quasistationärer Ansatz gewählt werden kann.

Stationäre, reibungslose Bernoulli-Gleichung von der Wasseroberfläche B bis zum Ausfluß A (Höhenform):

$$\frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{v_\mathrm{B}^2}{2g} + (H' + h) = \frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{v_\mathrm{A}^2}{2g} + 0 \tag{26}$$

Nach der Kontinuitätsgleichung gilt:

$$v_\mathrm{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \cdot v_\mathrm{A} \ll v_\mathrm{A} \tag{27}$$

Die Sinkgeschwindigkeit v_B des Wasserspiegels ist wieder sehr klein und somit in der Bernoulli-Gleichung gegenüber der Ausströmgeschwindigkeit v_A vernachlässigbar. Man erhält somit für v_A:

$$v_\mathrm{A} = \sqrt{2g(H' + h)} \tag{28}$$

Ausflußformel von Torricelli.

(b) Entleerungszeit T:

Die Entleerungszeit bei reibungsloser Strömung erhält man durch Integration der Gleichung:

$$v_\mathrm{B} = -\frac{dh}{dt} \tag{29}$$

$$\Rightarrow T = \int_{t=0}^{T} dt = -\int_{h=H}^{0} \frac{1}{v_\mathrm{B}} dh = \int_{h=0}^{H} \frac{1}{v_\mathrm{B}} dh \tag{30}$$

Mit $v_\mathrm{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \cdot v_\mathrm{A}$ und $v_\mathrm{A} = \sqrt{2g(H' + h)}$ erhält man:

$$T = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_{h=0}^{H} \frac{dh}{\sqrt{H' + h}} \tag{31}$$

$$= \left(\frac{D}{d}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(2\sqrt{H' + h}\right)\Big|_0^H \tag{32}$$

$$T = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{H' + H} - \sqrt{H'}\right) \tag{33}$$

Mit den Werten der Aufgabenstellung:

$$T = \left(\frac{1\text{m}}{0{,}01\text{m}}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{9{,}81\text{m/s}^2}} \tag{34}$$

$$\cdot \left(\sqrt{0{,}5\text{m} + 1\text{m}} - \sqrt{0{,}5\text{m}}\right) \tag{35}$$

$$T = 2337\text{s} \tag{36}$$

Aufgabe 71

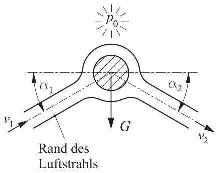
Ein Ball vom Gewicht G wird von einem Luftstrahl reibungsfrei umströmt und dadurch in der Schwebe gehalten. Der Strahl strömt unter dem Winkel α_1 mit der Geschwindigkeit v_1 an. Die Kompression der Luft in der Nähe des Balls kann ebenso vernachlässigt werden wie die Wirkung der Schwerkraft auf den Luftstrahl. Es soll keine horizontale Kraft vom Luftstrahl auf den Ball ausgeübt werden.

(a) Wie groß ist v_2 (Abströmgeschwindigkeit)?

(b) Wie groß ist der Abströmwinkel α_2?

(c) Welcher Massenstrom im Strahl ist erforderlich, damit der Ball schwebt?

Geg.: v_1, G, α_1, p_0



(a) Bernoulli:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{37}$$

$$\Rightarrow v_1^2 = v_2^2 \quad \Rightarrow |v_1| = |v_2| \tag{38}$$

(b) Impulssatz für einen Stromfaden:

$$\underline{F} = J(\underline{v}_2 - \underline{v}_1), \quad J = \text{Massenstrom} \tag{39}$$

horizontale Komponente

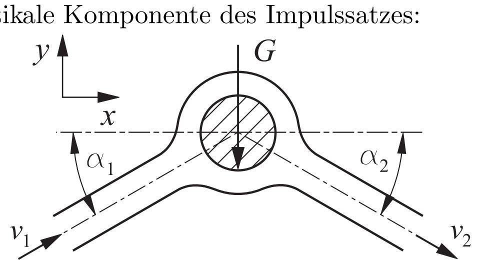
$$F_x = J(v_2 \cos\alpha_2 - v_1 \cos\alpha_1) \tag{40}$$

Annahme: keine Kraft in x-Richtung

$$0 = J(v_2 \cos\alpha_2 - v_1 \cos\alpha_1) \quad \Big| \, v_2 = v_1 \tag{41}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 \tag{42}$$

(c) vertikale Komponente des Impulssatzes:



$$F_y = -G = J(-v_2 \sin\alpha - v_1 \sin\alpha) \tag{43}$$

mit $v_2 = v_1, \quad \alpha_2 = \alpha_1$:

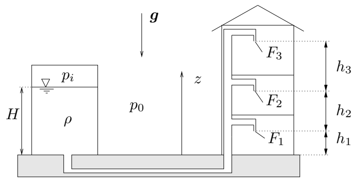
$$J = \frac{G}{2 v_1 \sin\alpha_1} \tag{44}$$

ist der erforderliche Massenstrom.

Hausaufgaben

Aufgabe 61

Ein dreigeschossiges Wohnhaus werde aus einem Kessel versorgt. Die Füllhöhe H im Kessel sei konstant. Der Luftdruck im Kessel sei p_i. Der Austrittsquerschnitt F_1 und die Höhen der Austritte h_α ($\alpha = 1, 2, 3$) seien gegeben. Die Strömung sei stationär. Das Fluid sei inkompressibel und reibungsfrei. Der Umgebungsdruck betrage $p_0 = \frac{1}{6}p_i$.



(a) Bestimmen Sie die Austrittsgeschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 abhängig von den gegebenen Größen $p_0, \rho, g, H, h_1, h_2, h_3$.

(b) Wie groß müssen die Flächen F_2 und F_3 sein, damit überall derselbe Massenstrom $\dot{M}$ abfließt?

(c) In welcher maximalen Höhe über dem Boden z_{max} könnte gerade noch Wasser entnommen werden?

Bei stationären Strömungen gilt entlang eines Stromfadens:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{konst.} \qquad \text{(Bernoulli)}$$

(a) Die Austrittsgeschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 bestimmen wir mit (Bernoulli) vom Kessel zum jeweiligen Abfluss. Wir nehmen dabei an, der Kessel (k) ist groß genug, um die Fließgeschwindigkeit in ihm vernachlässigen zu können. ($v_k = 0$)
Es ergibt sich für den Stromfaden $(k) \to (1)$

$$\frac{p_k}{\rho} + \frac{v_k^2}{2} + gH = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 \tag{45}$$

mit $p_k = p_i = 6p_0$, $v_k = 0$ und $p_1 = p_0$

$$\frac{6p_0}{\rho} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 \tag{46}$$

$$\Rightarrow \frac{v_1^2}{2} = \frac{5p_0}{\rho} + g(H - h_1) \tag{47}$$

Analoges Vorgehen für $(k) \to (2)$ und $(k) \to (3)$

$$\frac{6p_0}{\rho} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g(h_1 + h_2) \tag{48}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2^2}{2} = \frac{5p_0}{\rho} + g(H - h_1 - h_2) \tag{49}$$

$$\frac{6p_0}{\rho} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_3^2}{2} + g(h_1 + h_2 + h_3) \tag{50}$$

$$\Rightarrow \frac{v_3^2}{2} = \frac{5p_0}{\rho} + g(H - h_1 - h_2 - h_3) \tag{51}$$

Umformen von (33),(35) und (37) nach den Geschwindigkeiten:

$$v_1 = \sqrt{10\frac{p_0}{\rho} + 2g(H - h_1)} \tag{52}$$

$$v_2 = \sqrt{10\frac{p_0}{\rho} + 2g(H - h_1 - h_2)} \tag{53}$$

$$v_3 = \sqrt{10\frac{p_0}{\rho} + 2g(H - h_1 - h_2 - h_3)} \tag{54}$$

(b) Der Massenstrom $\dot{M} = \rho A v$ soll aus allen Ausflüssen gleich groß sein. Vergleicht man die Austritte 1 und 2 unter

Berücksichtigung der Querschnitte F_1 und F_2 sowie der ebend ermittelten Fließgeschwindigkeiten v_1 und v_2 ergibt sich (für $\rho =$ konst.):

$$\rho F_1 v_1 \stackrel{!}{=} \rho F_2 v_2 \tag{55}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_2 = F_1 \frac{v_1}{v_2}} \tag{56}$$

Und genauso für F_3:

$$\rho F_1 v_1 \stackrel{!}{=} \rho F_3 v_3 \tag{57}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_3 = F_1 \frac{v_1}{v_3}} \tag{58}$$

Aus (38),(39) & (40) lässt sich erkennen, dass $v_3 < v_2 < v_1$, also müssen die Austrittsflächen größer werden je höher man wohnt, um den selben Massenstrom $\dot{M}$ zu erreichen: $F_3 > F_2 > F_1$.

(c) Je höher wir wohnen, desdo langsamer tritt also das Wasser aus. Im Grenzfall liegt der Austritt so hoch, dass das Wasser mit einer Geschwindigkeit von 0 austritt. Wenn wir diese Information in (Bernoulli) berücksichtigen und einen Stromfaden $(k) \to (z_{max})$ betrachten ergibt sich:

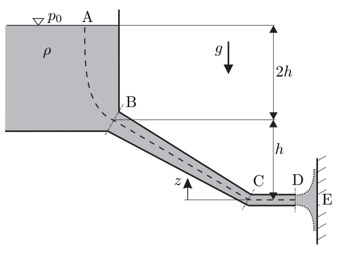
$$\frac{p_k}{\rho} + \frac{v_k^2}{2} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{0^2}{2} + gz_{max} \tag{59}$$

$$5\frac{p_0}{\rho} + gH = gz_{max} \tag{60}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{max} = 5\frac{p_0}{g\rho} + H} \tag{61}$$

Aufgabe 73

Aus dem Abflussrohr eines großen Behälters trifft Wasser auf eine Wand.
Das Abflussrohr besitzt einen kreisförmigen Querschnitt. Der Querschnittsradius r verkleinert sich entlang der Rohrlänge linear von $r(z = h) = 2R$ bei B auf $r(z = 0) = R$ bei C. Zwischen C und D ist der Querschnitt konstant.
Die Querschnittsfläche des Abflussrohres ist im Vergleich zur freien Wasserfläche im Behälter vernachlässigbar klein. Außerdem ist auch der Radius r des Rohres gegenüber der Höhe h vernachlässigbar klein. Das Wasser kann als ideales Fluid und die Strömung als stationär betrachtet werden.
Gegeben: g, ρ, p_0, h, R



(a) Geben Sie den Wasserdruck $p(z)$ im Behälter in Abhängigkeit der Koordinate z an. Wie groß ist der Wasserdruck am Behälterboden (Tiefe $2h$)?

(b) Bestimmen Sie die Strömungsgeschwindigkeit $v(z)$ zwischen B und C in Abhängigkeit von der Höhe z.

(c) Ermitteln Sie den Druckverlauf $p(z)$ zwischen B und C in Abhängigkeit von der Höhe z.

(d) Welche Kraft übt der Wasserstrahl bei E auf die Wand aus?

Hinweis: Überlegen Sie bei (b) und (c) zunächst, wie groß Strömungsgeschwindigkeit und Druck an den Stellen D und C sind.

(a) Hydrostatik:

$$p(z) = p_0 + \rho g(3h - z) \tag{62}$$

am Behälterboden herrscht der Druck

$$p(z = h) = p_0 + 2\rho gh \tag{63}$$

(b) Radius des Abflussrohres zwischen B und C:

$$r(z) = R + \frac{R}{h}z \tag{64}$$

Querschnittsfläche zwischen B und C:

$$A(z) = \pi r(z)^2 = \pi(R + \frac{R}{h}z)^2 \tag{65}$$

Die Geschwindigkeit an der Rohröffnung wird mit der Ausflussformel von Toricelli (alternativ: Bernoulli A-D) bestimmt:

$$v_{\mathrm{D}} = \sqrt{6gh} \tag{66}$$

und aus der Kontinuitätsgleichung folgt unmittelbar

$$v_{\mathrm{C}} = v_{\mathrm{D}} = \sqrt{6gh}. \tag{67}$$

Mit der Kontinuitätsgleichung kann nun die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkt z zwischen B und C berechnet werden:

$$A(z)v(z) = A_{\mathrm{C}} v_{\mathrm{C}} \tag{68}$$

$$\Leftrightarrow v(z) = \frac{\pi R^2}{\pi\left(R + \frac{R}{h}z\right)^2}\sqrt{6gh}$$

$$v(z) = \frac{\sqrt{6gh}}{\left(1 + \frac{z}{h}\right)^2}. \tag{69}$$

(c) An der Rohröffnung ist der Druck in der Flüssigkeit gleich dem Außendruck und aus der Bernoulligleichung folgt mit (53):

$$p_{\mathrm{C}} = p_{\mathrm{D}} = p_0. \tag{70}$$

Der Druck in einem beliebigen Punkt z zwischen B und C kann nun ebenfalls mit der Bernoulligleichung berechnet werden:

$$p(z) + \frac{\rho}{2}v(z)^2 + \rho gz = p_{\mathrm{C}} + \frac{\rho}{2}v_{\mathrm{C}}^2 + 0 \tag{71}$$

$$\Leftrightarrow p(z) = p_0 - \rho gz + \frac{\rho}{2}(v_{\mathrm{C}}^2 - v(z)^2)$$

$$= p_0 - \rho gz + \frac{\rho}{2}\left[6gh - \frac{6gh}{\left(1 + \frac{z}{h}\right)^4}\right]$$

$$p(z) = p_0 + \rho g(3h - z) - \frac{3\rho gh}{\left(1 + \frac{z}{h}\right)^4} \tag{72}$$

(d) Die Kraft auf die Wand wird mit dem Impulssatz berechnet. Dazu wird zunächst der Massenstrom bestimmt:

$$J_{\mathrm{D}} = \rho A_{\mathrm{D}} v_{\mathrm{D}} \tag{73}$$

$$= \pi\rho R^2\sqrt{6gh} \tag{74}$$

Der Impulssatz liefert die Kraft auf die Flüssigkeit:

$$F_F = J_{\mathrm{D}}(v_{\mathrm{E}} - v_{\mathrm{D}}) \quad \text{mit } v_{\mathrm{E}} = 0$$

$$= -6\pi\rho ghR^2. \tag{75}$$

Die Kraft auf die Wand hat den gleichen Betrag, ist jedoch entgegen gesetzt gerichtet. Also übt der Wasserstrahl die Kraft

$$F = -F_F = 6\pi\rho ghR^2 \tag{76}$$

auf die Wand aus.