Plenarübung

Aufgabe 40

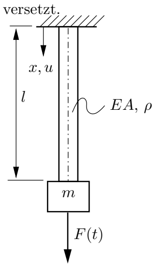
Ein einseitig eingespannter massebehafteter Stab (Dehnsteifigkeit EA, Dichte ρ, Länge l) im Schwerefeld trägt an seinem Ende eine Einzelmasse m. An dieser greift eine harmonische Erregerkraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ an, die den Stab in erzwungene Longitudinalschwingungen versetzt.

(a) Leite die das System beschreibende partielle Differentialgleichung durch Freischnitt eines infinitesimalen Massenelementes her.

(b) Durch eine Transformation auf die statische Ruhelage läßt sich die Differentialgleichung auf die folgende bekannte Form überführen:

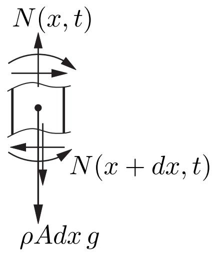
$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(x,t) = c_l^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x,t) \quad \text{mit} \quad c_l^2 = \frac{E}{\rho}$$

Ausgehend von dieser homogenen partiellen Differentialgleichung sollen die Längsschwingungen $\tilde{u}_p(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand bestimmt werden.



Geg.: F_0, Ω, E,A, ρ, l, m, g

(a) Freischnitt eines differentiell kleinen Elementes



2. NEWTONsches Gesetz: (senkrechte Komponente)

$$N(x+dx,t) - N(x,t) + \rho A dx\, g = \rho A dx\, \ddot{u}(x,t) \tag{1}$$

$$N'(x,t) + \rho A\, g = \rho A\, \ddot{u}(x,t) \tag{2}$$

$$\text{mit} \quad N(x,t) = EA\, u'(x,t)$$

$$\text{und} \quad EA = const.$$

$$\Rightarrow \quad EAu''(x,t) + \rho A\, g = \rho A\, \ddot{u}(x,t) \tag{3}$$

$$\ddot{u}(x,t) = \frac{E}{\rho} u''(x,t) + g \tag{4}$$

(b) Transformation auf die Verschiebung $\tilde{u}$ gegenüber der statischen Ruhelage u_0:

$$u(x,t) = u_0(x) + \tilde{u}(x,t) \tag{5}$$

Aus Gl. (4) folgt mit $\dot{u}_0 = 0$:

$$u_0''(x) = -\frac{\rho g}{E} \tag{6}$$

und mit den Randbedingungen (in Ruhe keine Anregung, deshalb $F(t) = 0$):

$$u_0(0) = 0 \tag{7}$$

$$u_0'(l) = \frac{mg}{EA} \quad \text{bzw.} \quad u_0'(0) = \frac{(m + A\rho l)g}{EA} \tag{8}$$

$$\hookrightarrow \; u_0(x) = \frac{\rho g l^2}{E}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{m}{\rho A l} + 1\right)\frac{x}{l}\right] \tag{9}$$

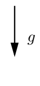
Gl. (5) mit (9) ergibt eingesetzt in Gl. (4) die bekannte Wellengleichung:

$$\ddot{\tilde{u}}(x,t) = c_l^2 \tilde{u}''(x,t) \tag{10}$$

$$\text{mit} \quad c_l^2 = \frac{E}{\rho} \tag{11}$$

Nun wird die partikuläre Lösung (=Auswirkung der äußeren Anregung) bestimmt.
Ansatz:

$$\tilde{u}_p(x,t) = X_p(x) \cdot \cos \Omega t \tag{12}$$



$$\Rightarrow \ddot{\tilde{u}}_p(x,t) = -\Omega^2 X_p(x) \cdot \cos \Omega t \tag{13}$$

$$\tilde{u}_p''(x,t) = X_p''(x) \cdot \cos \Omega t \tag{14}$$

$$\Rightarrow \; -\Omega^2 X_p(x) = c_l^2 X_p''(x) \tag{15}$$

$$\Rightarrow \; \underline{X_p''(x) + \left(\frac{\Omega}{c_l}\right)^2 X_p(x) = 0} \tag{16}$$

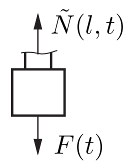
Mit einem Eulerschen Ansatz kann diese gewöhnliche Differentialgleichung gelöst werden:

$$X_p(x) = e^{\lambda x} \;\Rightarrow\; \lambda^2 = -\left(\frac{\Omega}{c_l}\right)^2 \;\Rightarrow\; \underline{\lambda_{1/2} = \pm i\left(\frac{\Omega}{c_l}\right)} \tag{17}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{X_p(x) = A\cos\frac{\Omega}{c_l}x + B\sin\frac{\Omega}{c_l}x} \tag{18}$$

Die Anpassung an die Randbedingungen erfolgt unter Berücksichtigung der Transformation auf Schwingungen aus der statischen Ruhelage. Deshalb taucht die Gewichtskraft im Freischnitt nicht auf, jedoch eine modifizierte Normalkraft $\tilde{N}(l,t)$, die Transformationseigenschaften beinhaltet[1]:

$$\tilde{u}_p(0,t) = 0 \tag{RB 1}$$



$$m\ddot{\tilde{u}}_p(l,t) = -\tilde{N}(l,t) + F(t)$$

$$= -EA\tilde{u}_p'(l,t) + F_0 \cos\Omega t \tag{RB 2}$$

N.R.:

$$\tilde{u}_p'(x,t) = \left(-A\sin\frac{\Omega}{c_l}x + B\cos\frac{\Omega}{c_l}x\right)\frac{\Omega}{c_l} \cdot \cos\Omega t \tag{19}$$

$$\ddot{\tilde{u}}_p(x,t) = -\Omega^2\left(A\cos\frac{\Omega}{c_l}x + B\sin\frac{\Omega}{c_l}x\right) \cdot \cos\Omega t \tag{20}$$

aus (RB 1) folgt:

$$X_p(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{A = 0}} \tag{21}$$

aus (RB 2) folgt:

$$\left[-m\Omega^2 X_p(l) + EA{X_p}'(l)\right]\cos\Omega t = F_0\cos\Omega t \tag{22}$$

$$B\left[-m\Omega^2 \sin\frac{\Omega}{c_l}l + EA\frac{\Omega}{c_l}\cos\frac{\Omega}{c_l}l\right]\cos\Omega t = F_0\cos\Omega t \tag{23}$$

$$\underline{\underline{B = \frac{F_0}{EA\frac{\Omega}{c_l}\cos\frac{\Omega}{c_l}l - m\Omega^2\sin\frac{\Omega}{c_l}l}}} \tag{24}$$

[1] Wer das nicht versteht, macht einen ganz normalen Freischnitt mit Gewichtskraft, gewinnt daraus eine Randbedingung für u, setzt die Transformationsbeziehung Gl. (5) ein und erhält Gl. (RB 2).

Damit lautet die partikuläre Lösung:

$$\tilde{u}_p(x,t) = \frac{F_0}{EA\frac{\Omega}{c_l}\cos\frac{\Omega}{c_l}l - m\Omega^2 \sin\frac{\Omega}{c_l}l} \cdot \sin\frac{\Omega}{c_l}x \cdot \cos\Omega t \quad (25)$$

Die allgemeine Lösung erhält man durch Superposition dieser partikulären Lösung mit der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung. Bei reellen Systemen existiert stets eine Dämpfung (auch wenn diese im vorliegenden Modell nicht abgebildet ist). Daher klingt die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ab und nach genügend langer Zeit (=eingeschwungener Zustand) verbleibt allein die partikuläre Lösung. Somit beschreibt (25) das Verhalten das Systems im eingeschwungenen Zustand.

Tutorium

Aufgabe 38

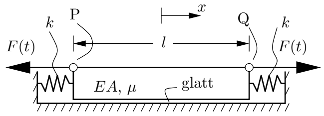
Ein Dehnstab (Dehnsteifigkeit EA, Massebelegung $\mu = \rho A$, Länge l) stützt sich an seinen beiden Enden ($x = -\frac{l}{2}$ und $x = \frac{l}{2}$) über Federn (Federsteifigkeit k) an der Umgebung ab. In der Ruhelage sind die Federn entspannt. An den Punkten P und Q greifen entgegengesetzt wirkende Kräfte mit dem Betrag $F(t) = F_0 \cos\Omega t$ an. Die Längsschwingungen $u(x,t)$ des Stabes im eingeschwungenen Zustand sind zu untersuchen.

(a) Wie lautet die die Längsschwingungen beschreibende partielle Differentialgleichung? *Hinweis: Keine Herleitung notwendig.*

(b) Wie lauten die Randbedingungen? *Beachten Sie bitte den Ursprung der Koordinate x!*

(c) Bestimmen Sie nun die Lösung $u(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand!

(d) Für welche Erregerkreisfrequenzen Ω bewegt sich der Punkt Q nicht?



Geg.: F_0, Ω, EA, μ, l

(a) Die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad c^2 = \frac{EA}{\mu} \quad (26)$$

beschreibt die Längsschwingungen des untersuchten Stabes.

(b) Die Randbedingungen erhält man durch geeignete Schnitte am linken und rechten Rand:

$$0 = N\left(-\frac{l}{2}, t\right) - ku\left(-\frac{l}{2}, t\right) - F(t) \quad (27a)$$

$$0 = -N\left(\frac{l}{2}, t\right) - ku\left(\frac{l}{2}, t\right) + F(t) \quad (27b)$$

Für die Normalkraft $N(x,t)$ gilt der Zusammenhang

$$N(x,t) = EA\frac{\partial u}{\partial x} \quad ,$$

der aus dem Werkstoffgesetz und der Kinematik hergeleitet werden kann.

(c) Zur Berechnung der Längsschwingungen $u(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand bestimmen wir zunächst eine partikuläre Lösung der DGL. Ansatz:

$$u_p(x,t) = X(x)\cos\Omega t \quad .$$

Die Systemantwort gehorcht also dem gleichen Zeitgesetz, wie die Anregung (Gleichtaktansatz).

Dieser Produktansatz überführt die partielle Differentialgleichung (26) in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad , \quad \lambda = \frac{\Omega}{c} \quad . \quad (28)$$

Die Lösung von (28) lautet bekanntlich

$$X = \alpha\cos\lambda x + \beta\sin\lambda x \quad . \quad (29)$$

Die Randbedingungen (27) kann man nun für die Ortsfunktion formulieren

$$0 = EAX'\left(-\frac{l}{2}\right) - kX\left(-\frac{l}{2}\right) - F_0 \quad (30a)$$

$$0 = -EAX'\left(\frac{l}{2}\right) - kX\left(\frac{l}{2}\right) + F_0 \quad (30b)$$

Einsetzen von (29) in die Randbedingungen (30) ergibt mit der Abkürzung $\xi = \frac{\lambda l}{2}$ unter Ausnutzung von $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned} F_0 &= EA\lambda\left(\alpha\sin\xi + \beta\cos\xi\right) - k\left(\alpha\cos\xi - \beta\sin\xi\right) \\ F_0 &= EA\lambda\left(-\alpha\sin\xi + \beta\cos\xi\right) + k\left(\alpha\cos\xi + \beta\sin\xi\right) \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten α und β. Durch Addieren bzw. Subtrahieren der Gleichungen erhält man unmittelbar die Forderungen, die an α und β für alle Zeiten gestellt werden:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \quad , \\ \beta &= \frac{F_0}{EA\lambda\cos\frac{\lambda l}{2} + k\sin\frac{\lambda l}{2}} \quad . \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung ergibt sich nun durch Einsetzen der berechneten Konstanten α und β

$$u_p\left(x,t\right) = \frac{F_0\sin\lambda x}{EA\lambda\cos\frac{\lambda l}{2} + k\sin\frac{\lambda l}{2}}\cos\Omega t \quad , \tag{32}$$

mit

$$\lambda = \frac{\Omega}{c} \quad , \quad c^2 = \frac{EA}{\mu} \quad .$$

Die allgemeine Lösung erhält man durch Superposition dieser partikulären Lösung mit der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung. Bei reellen Systemen existiert stets eine Dämpfung (auch wenn diese im vorliegenden Modell nicht abgebildet ist). Daher klingt die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ab und nach genügend langer Zeit (=eingeschwungener Zustand) verbleibt allein die partikuläre Lösung. Somit beschreibt (32) das Verhalten das Systems im eingeschwungenen Zustand. Der Verlauf der Verschiebung ist sinusförmig und oszilliert mit Ω. Die Amplitude hängt von Systemgrößen wie k und EA, aber auch von der Abstimmung der Erregung auf die Systemgrößen ab.

(d) Der Punkt Q bewegt sich nicht, wenn

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\left(\frac{l}{2},t\right)} = 0$$

für alle Zeiten t. D.h.

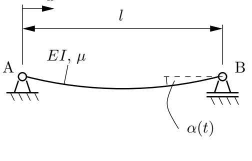
$$\sin\frac{\lambda l}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Omega = \frac{2n\pi c}{l} \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für diese Frequenzen ist der Nenner der Ortsfunktion ungleich 0.

Aufgabe 46

Ein beidseitig gelenkig gelagerter Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI, Massebelegung μ) werde dadurch in erzwungene Schwingungen versetzt, dass am rechten Lager eine harmonische Drehbewegung mit der Frequenz Ω vorgegeben ist. Geben Sie die Durchbiegung $w(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand an.

Geg.: l, EI, μ, $\alpha(t) = \hat{\alpha}\sin\Omega t$, Ω, $\hat{\alpha}$



Für die Durchbiegung des Balkens gilt die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0\,. \tag{33a}$$

Am rechten Rand ($x = l$) ist die Verdrehung vorgegben

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(l,t)} = -\hat{\alpha}\sin\Omega t \tag{33b}$$

und außerdem muß dort die Durchbiegung stets 0 sein

$$w\left(l,t\right) = 0 \quad . \tag{33c}$$

Am linken Rand ($x = 0$) müssen Durchbiegung und Biegemoment verschwinden, also

$$w\left(0,t\right) = 0 \tag{33d}$$

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{(0,t)} = 0 \quad . \tag{33e}$$

Das Randwertproblem (33) ist durch eine partielle Differentialgleichung und vier Randbedingungen beschrieben. Die Differentialgleichung ist homogen, die Randbedingungen inhomogen. Im eingeschwungenen Zustand geht man davon aus, dass alle durch die Anfangsbedingungen angeregten Schwingungen bereits abgeklungen sind. Gesucht ist nun eine partikuläre Lösung für (33). Für die erzwungene Schwingung wird angesetzt

$$w\left(x,t\right) = W\left(x\right)\sin\Omega t \tag{34}$$

(Ansatz vom Typ der rechten Seite). Eingesetzt in die Differentialgleichung (33a) ergibt sich

$$-\Omega^2 W\sin\Omega t + \frac{EI}{\mu}W^{(4)}\sin\Omega t = 0 \quad . \tag{35}$$

Diese Gleichung muss für alle t und x erfüllt sein. Dies ist nur möglich, wenn

$$W^{(4)} - \lambda^4 W = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^4 = \frac{\Omega^2\mu}{EI} \quad . \tag{36}$$

Die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (36) lautet

$$W = A_1\cosh(\lambda x) + A_2\sinh(\lambda x) + A_3\cos(\lambda x) + A_4\sin(\lambda x) \quad , \tag{37}$$

wie man leicht durch einen $e^{\beta t}$-Ansatz erhält. Einsetzen von (37) in die Randbedingungen führt auf die vier Konstanten A_i.

Aus den Randbedingungen am linken Rand (33d) und (33e) erhält man

$$A_1 = A_3 = 0 \quad .$$

Aus den verbleibenden Randbedingungen (33b) und (33c) ergeben sich die Konstanten zu

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\sin\lambda l}{\cos\lambda l\sinh\lambda l - \sin\lambda l\cosh\lambda l}\frac{\hat{\alpha}}{\lambda} \quad , \\ A_4 &= -\frac{\sinh\lambda l}{\cos\lambda l\sinh\lambda l - \sin\lambda l\cosh\lambda l}\frac{\hat{\alpha}}{\lambda} \quad . \end{aligned}$$

Die Schwingung wird somit durch

$$w\left(x,t\right) = \frac{\sin\lambda l\sinh\lambda x - \sinh\lambda l\sin\lambda x}{\cos\lambda l\sinh\lambda l - \sin\lambda l\cosh\lambda l}\frac{\hat{\alpha}}{\lambda}\sin\Omega t$$

mit

$$\lambda^4 = \frac{\Omega^2 \mu}{EI}$$

beschrieben. Die Formel versagt, wenn

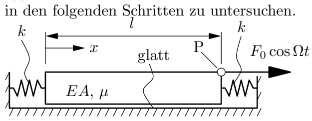
$$\tanh \lambda l - \tan \lambda l = 0 \quad . \tag{38}$$

Durch diese Gleichungen sind die Eigenfrequenzen des Systems bestimmt.

Hausaufgaben

Aufgabe 39

Ein Dehnstab (Dehnsteifigkeit EA, Massebelegung μ, Länge l) stützt sich an seinen beiden Enden ($x = 0$ und $x = l$) über Federn (Federsteifigkeit k) an der Umgebung ab. In der Ruhelage sind die Federn entspannt. Am Punkt P greift eine Kraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ an. Die Längsschwingungen $u(x,t)$ des Stabes im eingeschwungenen Zustand sind in den folgenden Schritten zu untersuchen.



(a) Wie lautet die die Längsschwingungen beschreibende partielle Differentialgleichung? *Hinweis: Keine Herleitung notwendig.*

(b) Wie lauten die Randbedingungen?

(c) Bestimmen Sie nun die Lösung $u(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand!

(d) Für welche Erregerfrequenzen Ω bewegt sich der Punkt P nicht? Setzen Sie hier große Erregerfrequenzen Ω voraus und geben Sie Näherungslösungen an.

Geg.: F_0, Ω, EA, μ, l

Ein Dehnstab (Dehnsteifigkeit EA, Massebelegung μ, Länge l) stützt sich an seinen beiden Enden über Federn (Federsteifigkeit k) an der Umgebung ab. Am Punkt P greift eine Kraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ an. Die Längsschwingungen $u(x,t)$ des Stabes im eingeschwungenen Zustand sind zu untersuchen.

Die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad c^2 = \frac{EA}{\mu} \tag{39}$$

beschreibt die Längsschwingungen des untersuchten Stabes. Die Randbedingungen erhält man durch geeignete Schnitte am linken und rechten Rand:

$$0 = N(0,t) - ku(0,t) \tag{40a}$$
$$0 = -N(l,t) - ku(l,t) + F(t) \tag{40b}$$

Für die Normalkraft $N(x,t)$ gilt der Zusammenhang

$$N(x,t) = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad ,$$

der aus dem Werkstoffgesetz und der Kinematik hergeleitet werden kann. Zur Berechnung der Längsschwingungen $u(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand wählt man den Produktansatz

$$u(x,t) = X(x) \cos \Omega t \quad .$$

Die Systemantwort gehorcht also dem gleichen Zeitgesetz, wie die Anregung. Dieser Produktansatz überführt die partielle Differentialgleichung (39) in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad , \quad \lambda = \frac{\Omega}{c} \tag{41}$$

Die Lösung von (41) lautet bekanntlich

$$X = \alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x \quad . \tag{42}$$

Die Randbedingungen (40) kann man nun für die Ortsfunktion formulieren

$$0 = EAX'(0) - kX(0) \tag{43a}$$
$$0 = -EAX'(l) - kX(l) + F_0 \tag{43b}$$

Einsetzen von (42) in die Randbedingungen (43) ergibt

$$0 = EA\beta\lambda - k\alpha \tag{44a}$$

$$\begin{aligned} 0 = &-EA\lambda\left(-\alpha\sin\lambda l + \beta\cos\lambda l\right) \\ &- k\left(\alpha\cos\lambda l + \beta\sin\lambda l\right) + F_0 \end{aligned} \tag{44b}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem, das man für die unbekannten Vorfaktoren α und β lösen kann. In Matrixform lautet das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -k & EA\lambda \\ k\cos\lambda l - EA\lambda\sin\lambda l & k\sin\lambda l + EA\lambda\cos\lambda l \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ F_0\end{bmatrix}$$

Mit der Cramerschen Regel gelangt man unmittelbar zur Lösung

$$\alpha = \frac{EA\lambda F_0}{(-E^2A^2\lambda^2 + k^2)\sin\lambda l + 2EAk\lambda\cos\lambda l}$$

$$\beta = \frac{kF_0}{(-E^2A^2\lambda^2 + k^2)\sin\lambda l + 2EA\lambda k\cos\lambda l}$$

Die Lösung im eingeschwungenen Zustand ist demnach

$$u\left(x,t\right) = \frac{\left(EA\lambda\cos\lambda x + k\sin\lambda x\right)F_0\cos\Omega t}{(-E^2A^2\lambda^2 + k^2)\sin\lambda l + 2EA\lambda k\cos\lambda l} \quad . \tag{45}$$

Der Punkt P bewegt sich nicht, das bedeutet

$$u(l,t) = 0\ \forall t \quad \Leftrightarrow \quad X(l) = 0 \quad .$$

Demnach folgt aus Gl. (45)

$$EA\lambda\cos\lambda l + k\sin\lambda l = 0 \quad .$$

Umgeformt erhält man die Gleichung

$$\cot\lambda l = -\frac{kl}{EA}\cdot\frac{1}{\lambda l} \quad , \tag{46}$$

deren Lösung für große Erregerfrequenzen, d.h. große λl,

$$\lambda_k l \approx \frac{2k+1}{2}\pi$$

lautet. Der Punkt P bewegt sich demnach für Erregerfrequenzen

$$\Omega_k \approx \frac{2k+1}{2}\cdot\frac{\pi c}{l} \quad , \quad k \gg 1$$

nicht. Zu überprüfen bleibt, ob die Lösung (45) tatsächlich auch für diese Frequenzen gilt, d.h. ob die berechneten Erregerfrequenzen nicht gerade den Eigenfrequenzen entsprechen. Anders ausgedrückt: es bleibt zu überprüfen, ob nicht auch der Nenner in Gl. (45) zu Null wird[2]. Der Nenner wird 0, wenn

$$\cot\lambda l = \frac{\gamma\lambda l}{2} - \frac{1}{2\gamma\lambda l} \quad , \quad \gamma = \frac{EA}{kl} \quad . \tag{47}$$

[2]Wenn der Nenner in Gl. (45) Null wird, wird die Auslenkung über alle Maßen groß (jedenfalls über die Maße, für die unsere Gleichungen gelten). Dieser Nenner ist die Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (44). Zur Erinnerung: Die Eigenfrequenzen werden bestimmt, indem die nichttrivialen Lösungen des homogenen Gleichungssystems gesucht werden.

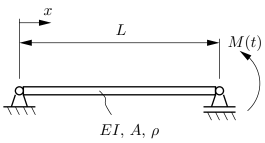
Eliminiert man $\cot\lambda l$ aus den Gleichungen (46) und (47) und formt um, erhält man

$$\left(\frac{EA\Omega}{ck}\right)^2 = -1 \quad .$$

Demnach werden Nenner und Zähler von Gl. (45) niemals gleichzeitig Null.

Aufgabe 45

Ein Balken ist links und rechts gelenkig gelagert, am rechten Ende ($x = L$) greift ein periodisches Moment an: $M(t) = M_0\cos\Omega t$.



(a) Gib die das Problem beschreibende partielle Differentialgleichung und die dazugehörigen Randbedingungen an!

(b) Bestimme die Schwingungsform im eingeschwungenen Zustand!

Geg.: M_0, Ω, L, EI, A, ρ

(a) $w(x,t)$ sei die Durchsenkung des Balkens.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -c_B^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \qquad , c_B^2 = \frac{EI}{\rho A} \tag{48}$$

Geometrische Randbedingung an beiden Seiten:

$$w(x=0,t) = 0 \tag{RB 1}$$

$$w(x=L,t) = 0 \tag{RB 2}$$

Links ist das Moment gleich Null (drehbares Lager) und rechts ist es vorgegeben:

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0,t} = 0 \tag{RB 3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=L,t} = -\frac{M_0}{EI}\cos\Omega t \tag{RB 4}$$

(b) Gesucht wird eine Schwingung mit der Frequenz der Anregung. Ansatz für eine solche partikuläre Lösung:

$$w(x,t) = X(x)\cos\Omega t \tag{49}$$

eingesetzt in (48):

$$X'''' - \frac{\Omega^2}{c_B^2}X = 0 \tag{50}$$

Die allgemeine homogene Lösung dieser gewöhnlichen linearen homogenen DGL lautet:

$$\begin{aligned} X(x) = &A_1\cosh\lambda x + A_2\sinh\lambda x + A_3\cos\lambda x \\ &+ A_4\sin\lambda x \qquad \text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{\Omega}{c_B}} \end{aligned} \tag{51}$$

(Im Unterschied zu den Eigenwertproblemen bei freien Schwingungen sind Ω und damit auch λ bekannt!)

Die Konstanten A_1 bis A_4 müssen aus den Randbedingungen bestimmt werden. (51) eingesetzt in

$$\text{(RB 1)} \Rightarrow \qquad A_1 + A_3 = 0 \tag{52}$$

$$\text{(RB 3)} \Rightarrow \qquad A_1 - A_3 = 0 \tag{53}$$

$$\hookrightarrow A_1 = 0,\ A_3 = 0 \tag{54}$$

$$\text{(RB 2)} \Rightarrow \quad A_2 \sinh \lambda L + A_4 \sin \lambda L = 0 \tag{55}$$

$$\text{(RB 4)} \Rightarrow \quad A_2 \sinh \lambda L - A_4 \sin \lambda L = -\frac{M_0}{\lambda^2 EI} \tag{56}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion von Gl. (55) und (56) ergibt sich:

$$A_2 = \frac{-M_0}{2EI\lambda^2 \sinh \lambda L} \tag{57}$$

$$A_4 = \frac{M_0}{2EI\lambda^2 \sin \lambda L} \tag{58}$$

Nebenbemerkung:
Der Nenner von A_4 wird Null und damit die Auslenkung unendlich („Resonanzkatastrophe“) wenn

$$\lambda L = k\pi \qquad , k = 1, 2, 3, ...\infty \tag{59}$$

$$\Rightarrow \Omega = c_B \frac{\pi^2}{L^2} k^2 \qquad , k = 1, 2, 3, ...\infty \tag{60}$$

angepaßte Lösung, Schwingungsform:

$$X(x) = \frac{M_0}{2EI\lambda^2} \left[\frac{\sin \lambda x}{\sin \lambda L} - \frac{\sinh \lambda x}{\sinh \lambda L} \right] \tag{61}$$