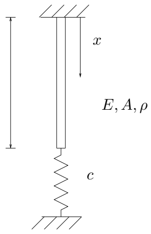
Plenarübung

Aufgabe 19

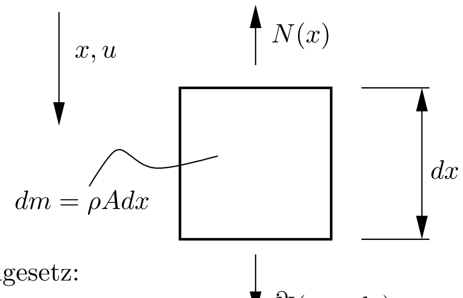
Ein mit Masse belegter Stab ist an einem Ende unverschieblich gelagert, an dem anderen mit einer Feder befestigt. Der Stab schwingt nach geeigneten Anfangsbedingungen längs.



(a) Wie lautet die Differentialgleichung, die die Schwingung für kleine Auslenkungen beschreibt?
(b) Forme die partielle Differentialgleichung um in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.
(c) Wie lauten die allgemeinen Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen?
(d) Formuliere die geometrischen und dynamischen Rand- und Übergangsbedingungen.
(e) Stelle die Frequenzgleichung auf, und löse sie grafisch.

Gegeben seien die Größen: l, c, E, A, ρ.

(a)



Materialgesetz:

$$N = EA\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$

Zweites Newtonsches Gesetz für das infinitesimale Stabelement zu einem bestimmten Zeitpunkt:

$$dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = N + dN - N = \frac{\partial N}{\partial x}dx \tag{2}$$

Das Materialgesetz (1) eingesetzt ergibt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_L^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad , c_L^2 = \frac{E}{\rho} \tag{3}$$

(b) Setze den Produktansatz nach Bernoulli

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

in die Wellendifferentialgleichung(3) ein

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c_L^2\frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konst.} \tag{5}$$

Wir erhalten zwei gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{6}$$

$$X'' + \frac{\omega^2}{c_L^2}X = 0 \tag{7}$$

(c) Die allgemeinen Lösungen für diese DGln lauten:

$$T(t) = D_1\cos\omega t + D_2\sin\omega t \tag{8}$$

$$X(x) = D_3\cos\frac{\omega}{c_L}x + D_4\sin\frac{\omega}{c_L}x \tag{9}$$

(d) Oberer Rand: keine Verschiebung

$$u(x=0,t) = 0 \tag{RB 1}$$

Am unteren Rand bewirkt die Feder eine Normalkraft von

$$N(x=l,t) = -cu(x=l) \tag{10}$$

Mit dem Materialgesetz (1) ergibt sich

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l,t} + \frac{c}{EA}u\Big|_{x=l,t} = 0 \tag{RB 2}$$

(e) Zur Berechnung der Eigenfrequenzen spielt die Phasenlage der Zeitfunktion $T(t)$ keine Rolle. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir:

$$D_1 = 0 \tag{11}$$

Aus (RB 1) folgt mit (9) in (4):

$$D_3 = 0 \tag{12}$$

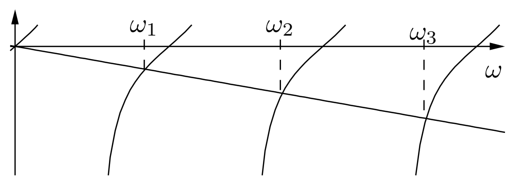
Jetzt lautet (4) ausgeschrieben:

$$u(x,t) = D\sin\omega t\sin\frac{\omega}{c_L}x \tag{13}$$

(13) eingesetzt in (RB 2):

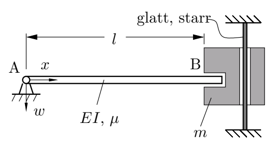
$$\tan\frac{l}{c_L}\omega = -\frac{EA}{c}\cdot\frac{\omega}{c_L} \tag{14}$$

Dies ist die Frequenzgleichung. Sie hat unendlich viele Lösungen $\omega_n, n = 1...\infty$:



Aufgabe 29

Ein Balken (Länge l, Massebelegung μ, Biegesteifigkeit EI) ist bei A gelenkig gelagert und bei B in eine Hülse gesteckt, die dem Balken dort eine horizontale Tangente aufzwingt. Die Hülse (Masse m) kann auf einer starren Stange in vertikaler Richtung reibungsfrei gleiten. Der Balken schwingt ausschließlich in Querrichtung.



(a) Wie lauten die Bewegungsdifferentialgleichung und die zugehörigen Randbedingungen? *Hinweis: Keine Herleitung notwendig.*
(b) Wie lautet die Frequenzgleichung? *Hinweis: Die Frequenzgleichung braucht nicht gelöst zu werden.*

Geg.: EI, μ, l, m

(a) Bewegungsdifferentialgleichung mit zugehörigen Randbedingungen

Bewegungsdifferentialgleichung

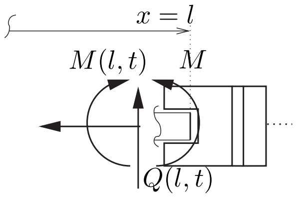
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{15}$$

Randbedingungen

$$w(0,t) = 0 \tag{16}$$

$$M(0,t) = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{(0,t)} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{(l,t)} = 0 \tag{18}$$



Schwerpunktsatz in positive w-Richtung:

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{(l,t)} = -Q(l,t) = EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\bigg|_{(l,t)} \tag{19}$$

Produktansatz

$$w(x,t) = X(x)T(t) \tag{20}$$

Einsetzen in Gl. (15) mit den Abkürzungen

$$c_B := \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad \text{und} \quad \lambda := \sqrt{\frac{\omega}{c_B}} \tag{21}$$

ergibt

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -c_B^2\frac{X''''}{X} = -\omega^2 \tag{22}$$

$$\Longrightarrow \ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{23}$$

$$\Longrightarrow X'''' - \lambda^4 X = 0 \tag{24}$$

allgemeine Lösung von Gl. (24) mit den Unbekannten $\beta_1, \ldots, \beta_4; \lambda(\omega)$:

$$X(x) = \beta_1 \cosh \lambda x + \beta_2 \sinh \lambda x ... \tag{25}$$

$$... + \beta_3 \cos \lambda x + \beta_4 \sin \lambda x \tag{26}$$

Randbedingungen

$(16) \rightarrow 0 = X(0)$
$(17) \rightarrow 0 = X''(0)$
$(18) \rightarrow 0 = X'(l)$
$(19) \rightarrow 0 = m\omega^2 X(l) + EIX'''(l) \quad$ (wg. (23))!

(b) Frequenzgleichung

$$X(0) = X''(0) = 0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_3 = 0$$

$$X'(l) = 0$$

$$\Rightarrow \beta_2 \cosh \lambda l + \beta_4 \cos \lambda l = 0$$

$$m\omega^2 X(l) + EIX'''(l) = 0$$

$$\Rightarrow (m\omega^2 \sinh \lambda l + EI\lambda^3 \cosh \lambda l)\beta_2 ...$$

$$... + (m\omega^2 \sin \lambda l - EI\lambda^3 \cos \lambda l)\beta_4 = 0$$

Mit Abkürzungen für die trig. und hyperb. Funktionen ist die notw. Bedingung für nichttriviale Lösungen ($\beta_2, \beta_4 \neq 0$):

$$\begin{vmatrix} \mathrm{ch}_{\lambda l} & \mathrm{c}_{\lambda l} \\ m\omega^2 \mathrm{sh}_{\lambda l} + EI\lambda^3 \mathrm{ch}_{\lambda l} & m\omega^2 \mathrm{s}_{\lambda l} - EI\lambda^3 \mathrm{c}_{\lambda l} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow m\omega^2(\tanh \lambda l - \tan \lambda l) + 2EI\lambda^3 = 0$$

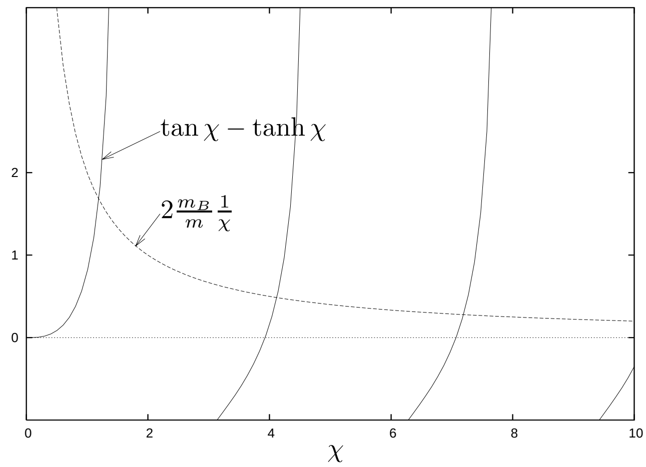
$$\text{mit} \quad \chi := \lambda l; \quad m_B := \mu l \quad \text{folgt:}$$

$$\boxed{\tan \chi - \tanh \chi = 2\frac{m_B}{m}\frac{1}{\chi}}$$

Dies ist die gesuchte Frequenzgleichung. Beachte dabei die Definition von λ in Gl. (21).

Grafische Lösung:

Manchmal kann man eine grafische Lösung gewinnen, indem man die linke und die rechte Seite der Frequenzgleichung geeignet aufträgt und Schnittpunkte sucht. Hier ist das geschehen für das Massenverhältnis $\frac{m_B}{m} = 1$:



Eigenformen

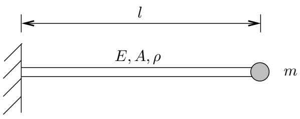
Die Eigenformen genügen der folgenden Gleichung:

$$X(x) = \beta_2 \left(\sinh \lambda x - \frac{\cosh \lambda l}{\cos \lambda l} \sin \lambda x \right) \tag{27}$$

Tutorium

Aufgabe 20

Ein mit Masse belegter Stab ist an einem Ende unverschieblich gelagert, an dem anderen Ende ist eine Einzelmasse befestigt. Der Stab schwingt nach geeigneten Anfangsbedingungen längs.



Gegeben seien die Größen: l, m, E, A, ρ

und $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ mit $c_L^2 = \frac{E}{\rho}$

(a) Wähle einen geeigneten Ansatz, um die partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zu überführen. Begründe und diskutiere dein weiteres Vorgehen bei der Lösung.

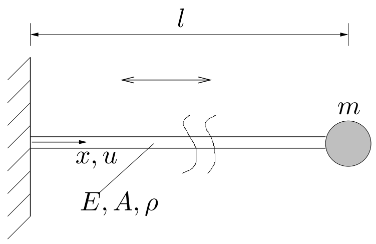
(b) Wie lauten die allgemeinen Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen?

(c) Formuliere die geometrischen und dynamischen Rand- und Übergangsbedingungen.

(d) Stelle die Frequenzgleichung auf, und löse sie grafisch.

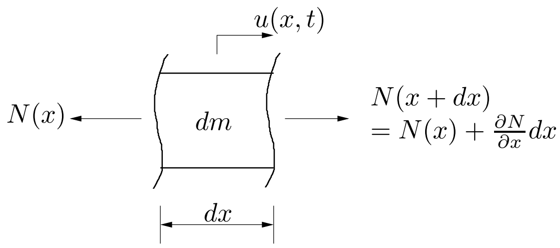
(e) Erläutere den Zusammenhang zwischen den Lösungen der Frequenzgleichung und den Eigenformen.

Longitudinalschwingung



Herleitung der Differentialgleichung:

dazu Freischnitt eines Massenelementes



Impulssatz:

$$dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum F = N(x) + \frac{\partial N}{\partial x}dx - N(x)$$

mit $dm = \rho A dx$

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x}dx$$

geteilt durch dx und mit Hookschem Materialgesetz $N = EA\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

geteilt durch ρ und A mit $c_L^2 = \frac{E}{\rho}$, es ergibt sich:

$$\underline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{28}$$

homogene, lineare, partielle Dgl. 2. Ordnung

(a) Separationsansatz nach Bernoulli:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{29}$$

wobei $X(x)$ die sogenannte Ortsfunktion und $T(t)$ die Zeitfunktion ist.

Einsetzen in die Dgl. und Teilen durch $X(x)$ und $T(t)$:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c_L^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = const. = -\omega_L^2$$

Die linke Seite der Gleichung ist eine reine Zeitfunktion, die rechte Seite eine reine Ortsfunktion. Linke und rechte Seite der Gleichung können zu allen Zeiten und an allen Orten nur gleich sein, wenn sie gleich einer Konstanten $-\omega_L^2$ sind. So ergeben sich zwei gewöhnliche Dgln.:

$$\ddot{T}(t) + \omega_L^2 T(t) = 0 \tag{30}$$

$$X''(x) + \left(\frac{\omega_L}{c_L}\right)^2 X(x) = 0 \tag{31}$$

(b) allgemeine Lösung dieser Dgln.:

$$T(t) = A_1 \sin \omega_L t + A_2 \cos \omega_L t \tag{32}$$

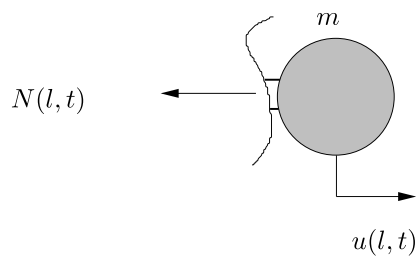
$$X(x) = B_1 \sin \frac{\omega_L}{c_L}x + B_2 \cos \frac{\omega_L}{c_L}x \tag{33}$$

(c) Rand und Übergangsbedingungen:

Geometrische Randbedingung an der Einspannung:

$$u(0,t) = 0 = X(0)T(t) \tag{RB 1}$$

$$\Rightarrow X(0) = 0 = B_1 \cdot 0 + B_2 \cdot 1 \;\Rightarrow \underline{B_2 = 0}$$



Impulssatz am rechten Ende des Balkens:

$$m\ddot{u}(l,t) = -N(l,t)$$

mit dem Hookschen Materialgesetz $N(l,t) = EAu'(l,t)$ ergibt sich die dynamische Randbedingung

$$m\ddot{u}(l,t) = -EAu'(l,t)\ . \tag{RB 2}$$

(d) Es wird die allgemeine Lösung (29) mit (32) und (33) in die Randbedingungen eingesetzt. Aus (RB 2) ergibt sich (mit $B_2 = 0$ und $\frac{\ddot{T}}{T} = -\omega_L^2$, s. Gl. (30)):

$$\omega_L^2 B_1 \sin\frac{\omega_L}{c_L}l = -\frac{EA}{m}\frac{\omega_L}{c_L}B_1 \cos\frac{\omega_L}{c_L}l \tag{34}$$

$$\frac{\omega_L}{c_L}l \tan\frac{\omega_L}{c_L}l = \frac{EAl}{mc_L^2} = \frac{EA\rho l}{mE} = \frac{m_S}{m} \tag{35}$$

wobei m_S die Masse des Stabes und m die Einzelmasse ist

<u>lösen:</u>

$$\frac{\omega_L}{c_L} l \tan \frac{\omega_L}{c_L} l = \frac{m_S}{m}$$

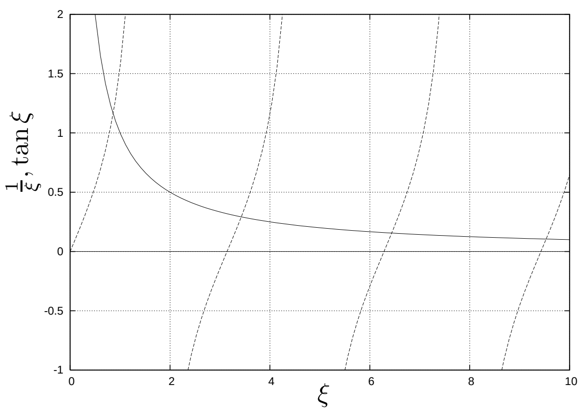
bzw. mit den Abkürzungen $\frac{\omega_L}{c_L} l = \xi$ und $\frac{m_S}{m} = \kappa$

$$\xi \tan \xi = \kappa$$

Geteilt durch ξ ergibt sich die transzendente Gleichung:

$$\underline{\tan \xi = \frac{\kappa}{\xi}}\ ,$$

mit ξ als unbekannter Größe. Diese Gleichung ist nur numerisch oder grafisch lösbar. Für $\kappa = 1$ (die Stabmasse ist gleich der Einzelmasse) ergibt sich z.B.: $\xi_1 = 0{,}86 \quad \Rightarrow$ erste Eigenfrequenz: $\underline{\omega_{L1} = \frac{\xi_1 c_L}{l}}$



Man sieht, es gibt unendlich viele Lösungen für ξ und somit auch unendlich viele Eigenkreisfrequenzen ω_L.

$$\omega_{Lk} = \frac{\xi_k c_L}{l} = \xi_k \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{1}{l}$$

(e) Die Eigenformen werden durch die Ortsfunktion (33) beschrieben, mit $B_2 = 0$:

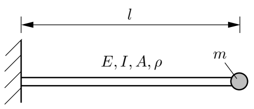
$$X(x) = B_1 \sin \frac{\omega_L}{c_L} x$$

Offenbar hängen die Eigenformen von ω_L und damit vom Massenverhältnis κ zwischen Stab und Einzelmasse ab.

Aufgabe 31

Ein einseitig eingespannter, massebehafteter Balken trägt am freien Ende eine Einzelmasse. Geeignete Anfangsbedingungen lassen den Balken quer schwingen.

Gegeben seien die Größen: l, m, E, I, A, ρ



(a) Zeige an einem differentiellen Massenelement, dass gilt: $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -c_Q^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ mit $c_Q^2 = \frac{EI}{\rho A}$!

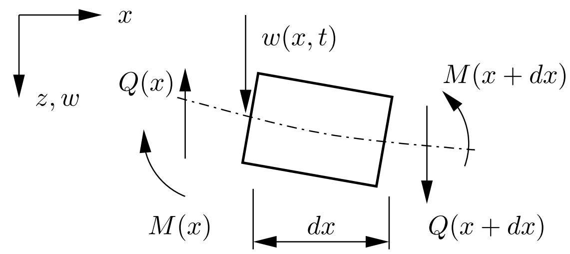
(b) Forme die partielle Differentialgleichung um in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

(c) Bestimme die allgemeine Lösung mit einem für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen allgemeingültigen Ansatz der Form $X(x) = Ae^{\lambda x}$!

(d) Formuliere die geometrischen und dynamischen Randbedingungen.

(e) Stelle die Frequenzgleichung auf!

(a)



Das zweite NEWTONsche Gesetz für das skizzierte Balkenelement lautet:

$$dm \cdot \left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x,t)} = Q(x+dx) - Q(x) \tag{36}$$

mit $dm = \rho A dx$ und $\frac{Q(x+dx)-Q(x)}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ergibt sich

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{37}$$

Wegen $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$ (Drehträgheit des infitesimalen Balkenelements vernachlässigbar) und dem Materialgesetz $M = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ergibt sich für konstantes ρ, A, E, I die DGl

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{38}$$

(b) Separationsansatz nach BERNOULLI:

$$w(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{39}$$

Eingesetzt in (38) ergibt

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{40}$$

$$X'''' - \frac{\omega^2}{c_Q^2} X = 0 \tag{41}$$

mit $c_Q^2 = \frac{EI}{\rho A}$ und ω noch zu bestimmende Konstante.

(c) Die gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen (40) und (41) werden mit einem Exponentialansatz gelöst.

$$T(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega \tag{42}$$

Die allgemeine Lösung kann dann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$T(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \tag{43}$$

Für die Ortsfunktion ergibt sich:

$$X(x) = e^{\mu x} \Rightarrow \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}},\ \mu_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}, \tag{44}$$

Die allgemeine Lösung kann in diesem Fall folgendermaßen geschrieben werden:

$$X(x) = B_3 \cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_4 \sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_5 \cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_6 \sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x \tag{45}$$

Nebenbemerkung:
Um letzteres zu beweisen, wird eingesetzt:

$$\sinh\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right) \qquad \cosh\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right)$$
$$\sin\alpha = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) \qquad \cos\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow X(x) = \frac{1}{2}\left(B_3 + B_4\right)e^{\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x} + \frac{1}{2}\left(B_3 - B_4\right)e^{-\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x} + \frac{1}{2}\left(B_5 - iB_6\right)e^{i\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x} + \frac{1}{2}\left(B_5 + iB_6\right)e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x} \quad (46)$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung (38) lautet dann:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(B_{1,k}\cos\omega_k t + B_{2,k}\sin\omega_k t\Big)\Big(B_{3,k}\cosh\sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x + B_{4,k}\sinh\sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x + B_{5,k}\cos\sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x + B_{6,k}\sin\sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x\Big) \quad (47)$$

(d) Am linken Rand feste Einspannung, geometrische Randbedingung:

$$w(x=0,t) = 0 \quad \text{(RB 1)}$$
$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(x=0,t)} = 0 \quad \text{(RB 2)}$$

Am rechten Rand ergeben sich dynamische Randbedingungen:
Eine Punktmasse hat keine Drehträgheit, das Moment ist Null:

$$M(x=l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{(x=l,t)} = 0 \quad \text{(RB 3)}$$

Die Querkraft ergibt sich durch Freischneiden der Punktmasse m aus dem zweiten Newtonschen Gesetz:

$$m\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = -Q(l,t) \quad (48)$$

mit $Q = -EIw'''$ ergibt sich:

$$\frac{m}{EI}\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = \left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_{(x=l,t)} \quad \text{(RB 4)}$$

(e) Wenn die Randbedingungen zu jeder beliebigen Zeit gelten sollen, muß jede einzelne Fundamentallösung die Randbedingungen erfüllen.

$$\text{(RB 1)} \Rightarrow \quad B_3 + B_5 = 0 \quad (49)$$
$$\text{(RB 2)} \Rightarrow \quad B_4 + B_6 = 0 \quad (50)$$

Für die beiden anderen Randbedingungen werden folgende Ableitungen benötigt:

$$X''(x) = \frac{\omega}{c_Q}\Big[B_3\cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_4\sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x - B_5\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x - B_6\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x\Big] \quad (51)$$

$$X'''(x) = \big(\frac{\omega}{c_Q}\big)^{\frac{3}{2}}\Big[B_3\sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_4\cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_5\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x - B_6\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x\Big] \quad (52)$$

$$\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t) \quad (53)$$

und es ergibt sich für (RB 3):

$$B_3\cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l + B_4\sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l - \big(-B_3\big)\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l - \big(-B_4\big)\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l = 0 \quad (54)$$

Für (RB 4) ergibt sich auch eine Gleichung für B_3 und B_4, zusammen mit (54) in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (55)$$

mit

$$M_{11} = \cosh\chi + \cos\chi \quad (56)$$
$$M_{12} = \sinh\chi + \sin\chi \quad (57)$$
$$M_{21} = -\omega^2\frac{m}{EI}\Big(\cosh\chi - \cos\chi\Big) - \Big(\frac{\omega}{c_Q}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big(\sinh\chi - \sin\chi\Big) \quad (58)$$
$$M_{22} = -\omega^2\frac{m}{EI}\Big(\sinh\chi - \sin\chi\Big) - \Big(\frac{\omega}{c_Q}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big(\cosh\chi + \cos\chi\Big) \quad (59)$$
$$\chi := \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l \quad (60)$$

Eine Lösung, bei der $B_3 \neq 0$ und $B_4 \neq 0$, kann es nur geben, wenn die Determinante der Matrix verschwindet:

$$M_{11}\,M_{22} - M_{12}\,M_{21} \stackrel{!}{=} 0 \quad (61)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\cosh\chi\sin\chi - \sinh\chi\cos\chi}{\cosh\chi\cos\chi + 1} = \frac{m_B}{m}\cdot\frac{1}{\chi} \quad (62)$$

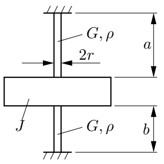
Mit (62) und (60) lassen sich numerisch die Eigenfrequenzen ω_k ermitteln.

Hausaufgaben

Aufgabe 25

Ein kreiszylindrischer Draht mit dem Radius r und der Dichte ρ sei wie skizziert eingespannt und mit einer Scheibe mit dem Massenträgheitsmoment J verbunden. Ermitteln Sie die Frequenzgleichung.

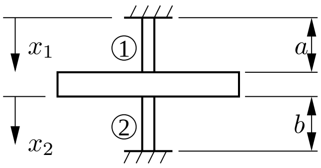
Geg.: G, ρ, J, a, b, r.



1. Partielle Schwingungs-Dgl. für Torsionsstab

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} \quad ; \; c^2 = \frac{G}{\rho} \tag{63}$$

$$\vartheta = \vartheta(x,t)\text{..Verdrehwinkel}$$
$$\rho = \text{Masse/Volumen}$$



Für beide Bereiche Produktansatz von Bernoulli:

$$\vartheta(x,t) = \Phi(x)T(t)$$
$$\rightarrow \ddot{\vartheta}(x,t) = \Phi(x)\ddot{T}(t) \quad ; \; \vartheta''(x,t) = \Phi''(x)T(t)$$
$$\rightarrow \Phi(x)\ddot{T}(t) = c^2\Phi''(x)T(t)$$

$$\frac{\ddot{T}}{T}(t) = c^2\frac{\Phi''}{\Phi}(x) = \text{const.} = -\omega^2$$

zwei gewöhnliche Dgln.:

$$\ddot{T} + \omega^2 \cdot T = 0 \tag{64}$$

$$\text{und} \quad \Phi'' + \frac{\omega^2}{c^2}\Phi = 0 \tag{65}$$

$$\text{mit} \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{66}$$

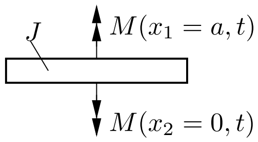
2. Allg. Lösung der DGLen für die Bereiche 1 und 2

$$\vartheta_1(x_1,t) = (A_1\cos kx_1 + B_1\sin kx_1)T(t) \tag{67}$$
$$\vartheta_2(x_2,t) = (A_2\cos kx_2 + B_2\sin kx_2)T(t) \tag{68}$$

3. Geometr. Rand- und Übergangsbedingungen

$$\vartheta_1(x_1 = 0,t) = 0 \tag{RB 1}$$
$$\vartheta_2(x_2 = b,t) = 0 \tag{RB 2}$$
$$\vartheta_1(x_1 = a,t) = \vartheta_2(x_2 = 0,t) \tag{RB 3}$$

3. Dynamische Rand- und Übergangsbedingung



aus dem Drallsatz für die starre Scheibe:

$$J\ddot{\vartheta} = M_{T2}(x_2 = 0,t) - M_{T1}(x_1 = a,t) \tag{69}$$

$$M_{T1}(x_1 = a,t) = GI_p\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_1}(x_1 = a,t) \tag{70}$$

$$M_{T2}(x_2 = 0,t) = GI_p\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_2}(x_2 = 0,t) \tag{71}$$

$$\text{mit} \quad I_p = \frac{\pi r^4}{2} \tag{72}$$

Gln. (70), (71) in (87) mit (RB 3):

$$J\ddot{\vartheta}_2(x_2 = 0,t) = GI_p\Big[\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_2}(0,t) - \frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_1}(a,t)\Big] \tag{RB 4}$$

5. Aufstellen des Gleichungssystems für die Konstanten in der allgemeinen Lösung

Zur Bestimmung von A_1, B_1, A_2, B_2 liegen die Gleichungen (RB 1), (RB 2), (RB 3) und (RB 4) vor.

$$\text{(RB 1) in (67)} \rightarrow A_1 = 0 \tag{73}$$
$$\text{(RB 2) in (68)} \rightarrow A_2\cos kb + B_2\sin kb = 0 \tag{74}$$
$$\text{(RB 3) mit (67), (68)} A_1\cos ka + B_1\sin ka = A_2 \tag{75}$$
$$\text{(RB 4) und (68) mit (64):}$$
$$\frac{G\cdot I_p}{J}\Big[kB_2 - (-A_1k\sin ka + B_1k\cos ka)\Big] = A_2\cdot(-\omega^2) \tag{76}$$

Das ist ein lineares homogenes Gleichungssystem. Außer der trivialen Lösung $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$ kann es Lösungen haben, wenn die Gleichungen linear abhängig sind ⇔ die Koeffizientenmatrix singulär ist ⇔ die Koeffizientendeterminante gleich Null ist.

Wir eliminieren zunächst A_1 und dann mit Gl. (75) A_2. ω wird mit k ersetzt, s. Gl. (66):

$$B_1\sin ka\cdot\cos kb + B_2\sin kb = 0 \tag{77}$$
$$B_1\Big(c^2k^2\sin ka - \frac{G\cdot I_p}{J}k\cos ka\Big) + B_2\frac{G\cdot I_p}{J}k = 0 \tag{78}$$

Nur dann nichttriviale Lösungen für B_1, B_2 , wenn Koeff.-Det. gleich Null ! $\rightarrow$

6. Eigenwert - Gleichung

$$\big[\sin ka\cdot\cos kb + \cos ka\cdot\sin kb\big]\frac{G\cdot I_p}{J}k - c^2k^2\sin ka\sin kb = 0 \tag{79}$$

$$\hookrightarrow \quad \cot ka + \cot kb = kc^2\cdot\frac{J}{G\,I_p} \tag{80}$$

$$\text{mit} \quad k = \frac{\omega}{c}; \qquad c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{81}$$

Aus Gleichung (80) lassen sich z.B. numerisch Lösungen für die Wellenzahl k gewinnen und mit Gl. (81) dann die dazugehörigen Eigenkreisfrequenzen ω.

7. Zur Bestimmung der Eigenformen Zu jeder Eigenfrequenz gehört eine bestimmte Eigenform, also eine Schwingungsform mit der das System in der entsprechenden Eigenfrequenz schwingt. Diese bestimmt man folgendermaßen:

Einsetzen der ermittelten Lösungen für ω bzw. k in die allgemeine Lösung Gln. (67) und (68) der Bewegungsdifferentialgleichung.

Eiliminieren aller Koeffizienten A_1, B_1, A_2, B_2 bis auf einen aus der allg. Lösung Gln. (67) und (68). Dazu benutzen wir die Gleichungen (73), (75) und (77). Gleichung (78) bringt keine neue Information, da sie mit Gl. (77) linear abhängig ist, so wurden die eingesetzten ω bzw. k ja bestimmt.

$$\vartheta_1(x_1,t) = B_1 \sin kx_1\, T(t) \tag{82}$$

$$\vartheta_2(x_2,t) = B_1 \sin ka \left[\cos kx_2 - \cot kb \sin kx_2\right] T(t) \tag{83}$$

Mit den Additionstheoremen für Sinus und Kosinusfunktionen kann man zeigen, daß sich die zweite Gleichung auch auf folgende Form bringen läßt:

$$\text{mit } \tilde{x} = b - x \tag{84}$$

$$\vartheta_2(x_2,t) = B_1 \frac{\sin ka}{\sin kb} \sin k\tilde{x}\, T(t) \tag{85}$$

Die so entstandenen Funktionen beschreiben die Schwingung, wobei eine Konstante (hier: B_1) unbestimmt bleibt. Den ortsabhängigen Teil der Lösung nennt man Eigenform.

Anmerkung: Diese Aufgabe kann natürlich auch von Anfang an mittels $\tilde{x}$ für Bereich zwei bestimmt werden. Dies vereinfacht die die Rechnungen. Allerdings muss dann bei den Randbedingungen darauf geachtet werden, dass der positive Drehsinn für x_1 und $\tilde{x}$ unterschiedlich ist. Damit werden $\tilde{\vartheta}$ und ϑ_1 in unterschideliche Richtungen drehenend eingeführt. Die Lösung für die DGL, $\tilde{\vartheta}$ ist dann die Gleiche wie in (85) nur mit unterschiedlichem Vorzeichen. Aus der dritten Randbedingung wird dann:

$$\vartheta_1(x_1 = a, t) = -\tilde{\vartheta}(\tilde{x} = b, t). \tag{86}$$

Der Drallsatz verändert sich wie folgt:

$$\ddot{J}\vartheta(\tilde{x} = b, t) = -M_{T2}(\tilde{x} = b, t) + M_{T1}(x_1 = a, t) \tag{87}$$

Aufgabe 32

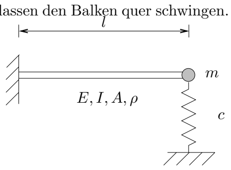
Ein einseitig eingespannter, massebehafteter Balken trägt am freien Ende eine Einzelmasse und ist dort mit einer Feder abgestützt. Geeignete Anfangsbedingungen lassen den Balken quer schwingen.

(a) Forme die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -c_Q^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ mit $c_Q^2 = \frac{EI}{\rho A}$ um in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen!

(b) Bestimme die allgemeine Lösung der Ortsfunktion mit einem Exponentialansatz!

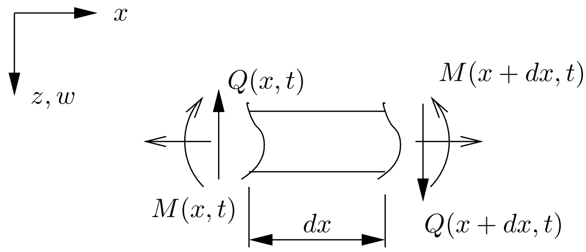
(c) Formuliere die geometrischen und dynamischen Randbedingungen!

(d) Stelle die Frequenzgleichung auf, und gib eine Bestimmungsgleichung für die Eigenformen an!



Gegeben seien die Größen: l, m, c, E, I, A, ρ

Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichung:



Das zweite Newtonsche Gesetz für das skizzierte Balkenelement lautet:

$$dm \cdot \left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x,t)} = Q(x+dx,t) - Q(x,t) \tag{88}$$

mit $dm = \rho A dx$ und $Q(x+dx,t) \cong Q(x,t) + \frac{\partial Q}{\partial x} dx$ ergibt sich

$$\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{89}$$

mit $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$ und dem Materialgesetz $M = -EI \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ergibt sich für konstantes ρ,A,E,I die DGl

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{90}$$

(a) Separationsansatz nach Bernoulli:

$$w(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{91}$$

Eingesetzt in (90) ergibt

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{92}$$

$$X'''' - \frac{\omega^2}{c_Q^2} X = 0 \tag{93}$$

mit $c_Q^2 = \frac{EI}{\rho A}$ und ω noch zu bestimmende Konstante.

(b) Für die Zeitfunktion erhalten wir:

$$T(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \tag{94}$$

Für die Ortsfunktion ergibt sich:

$$X(x) = B_3 \cosh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x + B_4 \sinh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x + B_5 \cos \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x + B_6 \sin \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x \tag{95}$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung (90) lautet dann:

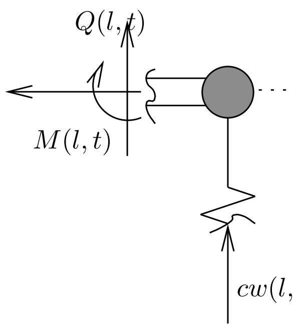
$$\omega(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(B_{1,k}\cos\omega_k t + B_{2,k}\sin\omega_k t\Big)$$
$$\Big(B_{3,k}\cosh\sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x + B_{4,k}\sinh\sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x$$
$$+ B_{5,k}\cos\sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x + B_{6,k}\sin\sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x\Big) \quad (96)$$

(c) Am linken Rand besteht eine feste Einspannung charakterisiert durch die geometrischen Randbedingungen:

$$w(x=0,t) = 0 \quad \text{(RB 1)}$$
$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(x=0,t)} = 0 \quad \text{(RB 2)}$$

Am rechten Rand ergeben sich dynamische Randbedingungen:
Eine Punktmasse hat keine Drehträgheit und die Feder leitet auch kein Moment ein:

$$M(x=l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{(x=l,t)} = 0 \quad \text{(RB 3)}$$



Die Querkraft ergibt sich durch Freischneiden der Punktmasse m aus dem zweiten Newtonschen Gesetz (c = Federsteifigkeit):

$$m\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = -Q(l,t) - cw|_{(x=l,t)} \quad (97)$$

mit $Q = -EIw'''$ ergibt sich:

$$m\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = EI\left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_{(x=l,t)} - cw|_{(x=l,t)} \quad \text{(RB 4)}$$

(d) Bei Einsetzen der allg. Lösung in die Randbedingungen werden folgende Ableitungen benötigt:

$$X''(x) = \frac{\omega}{c_Q}\Big[B_3\cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_4\sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x$$
$$- B_5\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x - B_6\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x\Big] \quad (98)$$
$$X'''(x) = \big(\frac{\omega}{c_Q}\big)^{\frac{3}{2}}\Big[B_3\sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_4\cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x$$
$$+ B_5\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x - B_6\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x\Big] \quad (99)$$
$$\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t) \quad (100)$$

Jede einzelne Fundamentallösung soll die Randbedingungen zu jeder Zeit erfüllen. Deshalb gilt $\forall k$ mit den Abkürzungen $B_3 := B_{3,k}$, ...:

$$\text{(RB 1)} \Rightarrow \quad B_3 + B_5 = 0 \quad (101)$$
$$\text{(RB 2)} \Rightarrow \quad B_4 + B_6 = 0 \quad (102)$$

und es ergibt sich für (RB 3):

$$B_3\cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l + B_4\sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l$$
$$-\big(-B_3\big)\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l - \big(-B_4\big)\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l = 0 \quad (103)$$

Für (RB 4) ergibt sich auch eine Gleichung für B_3 und B_4, zusammen mit (103) in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (104)$$

mit

$$M_{11} = \cosh\chi + \cos\chi$$
$$M_{12} = \sinh\chi + \sin\chi$$
$$M_{21} = -\frac{1}{EI}(m\omega^2 - c)\Big(\cosh\chi - \cos\chi\Big) - \Big(\frac{\omega}{c_Q}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big(\sinh\chi - \sin\chi\Big)$$
$$M_{22} = -\frac{1}{EI}(m\omega^2 - c)\Big(\sinh\chi - \sin\chi\Big) - \Big(\frac{\omega}{c_Q}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big(\cosh\chi + \cos\chi\Big)$$
$$\chi := \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l \quad (105)$$

Eine Lösung, bei der $B_3 \neq 0$ und $B_4 \neq 0$, kann es nur geben, wenn die Determinante der Matrix verschwindet ($m_B = A\rho l$):

$$M_{11}\,M_{22} - M_{12}\,M_{21} \overset{!}{=} 0 \quad (106)$$
$$\frac{m}{m_B}\chi - \frac{cl^3}{EI}\chi^{-3} = \frac{1 + \cosh\chi\cos\chi}{\cosh\chi\sin\chi - \sinh\chi\cos\chi} \quad (107)$$

Durch numerische Auswertung von (107) mit (105) lassen sich die Eigenfrequenzen ω_k ermitteln.

Die Gleichung (95) beschreibt die Eigenformen, wenn darin die ermittelten Eigenfrequenzen ω_k und die dazugehörigen Koeffizienten $B_3 \ldots B_6$ eingesetzt werden.