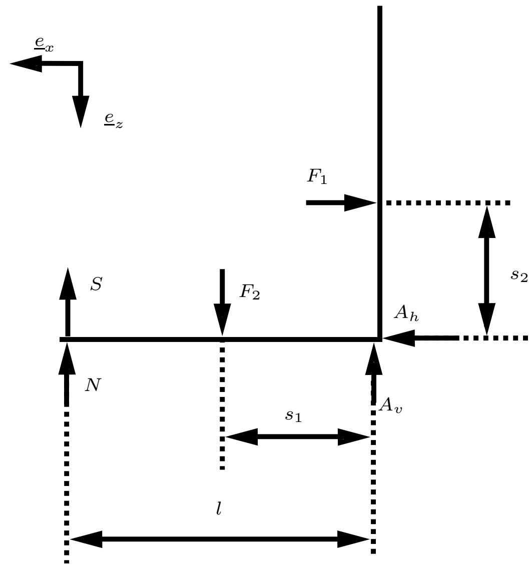
Aufgabe 1

(a) Freischnitt der Klappe: $\boxed{2}$
Kräfte:



$$F_1 = \int_0^h \rho g b z \; \mathrm{d}z \quad \boxed{1} \tag{1}$$
$$= \rho g b \frac{h^2}{2} \quad \boxed{1} \tag{2}$$
$$F_2 = \rho g b h l \quad \boxed{1} \tag{3}$$
$$S = \rho g V \quad \boxed{1} \tag{4}$$

Hebelarme:

$$s_1 = \frac{h}{3} \quad \boxed{1} \tag{5}$$
$$s_2 = \frac{l}{2} \quad \boxed{1} \tag{6}$$

Gleichgewichtsbedingungen:

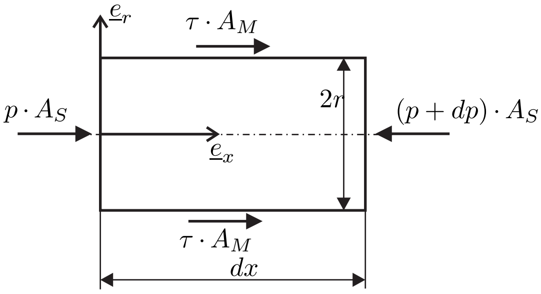
$$\Sigma F_x = 0 = -F_1 + A_h \tag{7}$$
$$\Leftrightarrow \quad A_h = \rho g b \frac{h^2}{2} \quad \boxed{1} \tag{8}$$
$$\Sigma M_y^{(A)} = 0 = F_1 s_1 + (N+S)l - F_2 s_2 \quad \boxed{1} \tag{9}$$
$$\Leftrightarrow \quad N = \frac{1}{2}\rho g b h l - \rho g V - \rho g b \frac{h^3}{6l} \quad \boxed{1} \tag{10}$$
$$\Sigma F_z = 0 = F_2 - A_v - S - N \tag{11}$$
$$\Leftrightarrow \quad A_v = \frac{1}{2}\rho g b h l + \rho g b \frac{h^3}{6l} \quad \boxed{1} \tag{12}$$

(b) Aus dem Diagramm liest man die Nullstellen der Normalkraft N ab:

$$h_{min} \approx 0{,}2\; l \quad \boxed{1} \quad , \quad h_{max} \approx 1{,}7\; l \quad \boxed{1} \tag{13}$$

Aufgabe 2

Freischnitt eines kleinen Zylinders $\boxed{1}$



(a)

$$m\ddot{x} = \Sigma F_x = 0 = \tau A_M + p A_S - (p+dp)A_S \tag{14}$$
$$\Rightarrow 0 = \tau \cdot 2\pi r \cdot dx - dp\,\pi r^2 \quad \boxed{1} \tag{15}$$

Newtonsches-Schubspannungsgesetz

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dr} \quad \boxed{1} \tag{16}$$

Daraus folgt für das Geschwindigkeitsprofil

$$\frac{dv_x}{dr} = \frac{r}{2\eta}\frac{dp}{dx} \quad \boxed{1} \tag{17}$$

(b) Haften am Rand

$$v_x(r = R) = 0 \quad \boxed{1} \tag{18}$$

(c)

$$v_x = \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta} r^2 + C \tag{19}$$
$$0 = \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta} R^2 + C \tag{20}$$
$$\Rightarrow C = -\frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta} R^2 \quad \boxed{1} \tag{21}$$
$$\Rightarrow v_x(r) = \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right) \quad \boxed{1} \tag{22}$$

(d)

$$Q = \int_{(A)} v(r)\, dA \quad \boxed{1} \tag{23}$$
$$\text{mit } dA = 2\pi r\, dr \tag{24}$$
$$Q = \int_0^R \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right) 2\pi r\, dr \tag{25}$$
$$\Leftrightarrow Q = -\frac{dp}{dx}\frac{\pi}{8\eta} R^4 \quad \boxed{1} \tag{26}$$
$$\Leftrightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{8\eta Q}{\pi R^4} \tag{27}$$

Damit ist das Geschindigkeitsprofil als Funktion von Q:

$$\Rightarrow v_x(r) = -\frac{2Q}{\pi R^4}\left(r^2 - R^2\right) \quad \boxed{1} \tag{28}$$

Aufgabe 3

(a) Bewegungsgleichung:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \tag{29}$$

Poduktansatz:

$$w(x,t) = W(x)T(t) \tag{30}$$

(30) in (29):

$$\rho A W \ddot{T} = -EIW^{IV}T \quad \boxed{1} \tag{31}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\ddot{T}}{T} = -\frac{EI}{\rho A}\frac{W^{IV}}{W} = const. = -\omega^2 \quad \boxed{1} \tag{32}$$

Daraus folgen die gewöhnlichen DGL

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad \boxed{1} \tag{33}$$

$$W^{IV} - \frac{\rho A \omega^2}{EI} W = 0 \quad \boxed{1} \tag{34}$$

(b)

$$W(x) = A^* \cos(\kappa x) + B \sin(\kappa x) + \\ + C \cosh(\kappa x) + D \sinh(\kappa x) \quad \boxed{1} \tag{35}$$

$$\kappa^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \tag{36}$$

(c) Randbedingungen $\boxed{2}$:

$$w(0,t) = 0 \tag{37}$$

$$-EIw''(0,t) = 0 \tag{38}$$

$$w'(l,t) = 0 \tag{39}$$

$$-EIw'''(l,t) = 0 \tag{40}$$

(d) Aus (37) und (38) folgt:

$$A^* + C = 0 \tag{41}$$

$$A^* - C = 0 \tag{42}$$

$$\Leftrightarrow \quad A^* = C = 0 \quad \boxed{2} \tag{43}$$

Aus (39) folgt dann:

$$B\cos(\kappa l) + D\cosh(\kappa l) = 0 \tag{44}$$

$$\Leftrightarrow D = -B\frac{\cos(\kappa l)}{\cosh(\kappa l)} \quad \boxed{1} \tag{45}$$

Aus (40) folgt dann die Frequenzgleichung:

$$\cos(\kappa l) = 0 \quad \boxed{1} \tag{46}$$

(e) Die veränderte Randbedingung ist die Querkraft am rechten Rand:

$$-EIw_p'''(l,t) = F_0 \cos(\Omega t) \quad \boxed{1} \tag{47}$$

(f) Die Gleichungen (43) und (45) bleiben gültig. $\boxed{2}$
Aus (47) ergibt sich dann:

$$B = \frac{F_0}{2EIk^3\cos(kl)} \quad \boxed{1} \tag{48}$$

Die gesamte Ortsfunktion der partikulären Lösung ist damit

$$W_p(x) = \frac{F_0}{2EIk^3}\left[\frac{\sin(kx)}{\cos(kl)} - \frac{\sinh(kx)}{\cosh(kl)}\right] \quad \boxed{1} \tag{49}$$