Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 8.

Arbeit, kinetische und potentielle Energie, konservative Kräfte, Energieerhaltungssatz

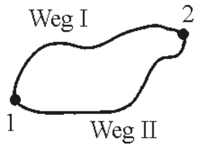
Literatur: *Hauger, Schnell und Gross.* Technische Mechanik III, 1.2.7

I. Konservative Kräfte

Gegeben sei ein *Kraftfeld* $\vec{F}(x,y,z)=\vec{F}(\vec{r})$.

Das Kraftfeld (oder einfach die Kraft) heißt *konservativ,* wenn die von dieser Kraft *auf einem beliebigen geschlossenen Weg* geleistete Arbeit gleich Null ist: $W=\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$.

Schlussfolgerung:



Die Arbeit zwischen 1 und 2 hängt <u>nicht</u> vom Weg ab!

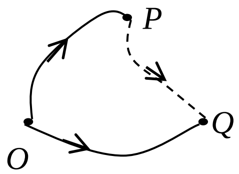
<u>Konservative Kräfte:</u> Gravitationskraft, elastische Kraft, elektrostatische Kräfte.
<u>Nichtkonservative Kräfte:</u> Widerstandskraft, Reibungskraft

II. Potentielle Energie einer konservativen Kraft

Wir definieren eine neue Funktion:

$$U(P)=-\int_O^P \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=-W(O\to P)$$

$$U(Q)=-\int_O^Q \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=-W(O\to Q)$$



Jetzt gehen wir den Weg $O\to P\to Q\to O$.
Die Arbeit ist gleich

$$W(O\to P)+W(P\to Q)+W(Q\to O)=0$$

oder

$-U(P)+W(P\to Q)+U(Q)=0$.

Daraus folgt

$$\boxed{W(P\to Q)=U(P)-U(Q)}$$

Bei einer Bewegung unter der Wirkung von konservativen Kräften gilt

$$K_2-K_1=W=U_1-U_2.$$

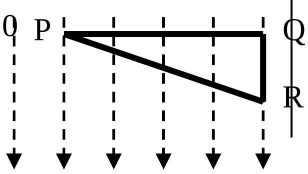
Daraus folgt der ***Energieerhaltungssatz***

$$\boxed{K_2+U_2=K_1+U_1=konst}$$

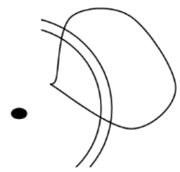
III. Wie stellt man fest, ob eine Kraft konservativ ist?

- Ein homogenes Kraftfeld ist konservativ.

$$W=\vec{F}\cdot\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_1} d\vec{r}=\vec{F}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_1)\equiv 0$$



- Eine *zentrale Kraft*, die nur vom Abstand zu einem Zentrum abhängt, ist konservativ.



- Die Summe konservativer Kräfte ist wieder eine konservative Kraft:
  - Gravitationskraft einer beliebigen Massenverteilung
  - Elektrostatische Kraft einer beliebigen Verteilung von Ladungen
  - Elastische Kräfte (letztendlich nichts anderes als elektrische Kräfte)
  - Eine beliebige Kombination aus elektrischen, elastischen und Gravitationskräften.

IV. Potentielle Energien:

a) Einer elastischen Feder mit Steifigkeit c:

$$U(x)=c\frac{x^2}{2} \qquad (1)$$

b) Im Gravitationsfeld:

$$U(r)=-G\frac{m_1m_2}{r}. \qquad (2)$$

c) Der Zentrifugalkraft in einem rotierenden Bezugssystem:

$$U(r)=-\frac{m}{2}\omega^2r^2. \qquad (3)$$

V. Kräfte, die senkrecht zur Bewegungsrichtung gerichtet sind, leisten keine Arbeit und brauchen weder im allgemeinen Arbeitssatz, noch im Energieerhaltungssatz berücksichtigt zu werden:

- Zwangs- oder Reaktionskräfte
- magnetische Kräfte $\left(\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}\right)$
- Corioliskraft im rotierenden Bezugssystem $\left(\vec{F}=2m\vec{v}\times\vec{\omega}\right)$
- (aerodynamische) Auftriebskraft.

Erläuterung zur Arbeit von Zwangskräften

Zwangskräfte in mechanischen Systemen sind Kräfte, die stets *senkrecht zur Bewegungsrichtung* gerichtet sind. Daraus folgt für die Arbeit:

$$W=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\left(\vec{F}_{Zwangs}+\vec{F}_{eingeprägt}\right)\cdot d\vec{r}=$$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}_{Zwangs}\cdot d\vec{r}+\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}_{eingeprägt}\cdot d\vec{r}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}_{eingeprägt}\cdot d\vec{r}$$

Bei Berechnung der Arbeit können Zwangs- (Reaktions-)kräfte außer Acht gelassen werden.

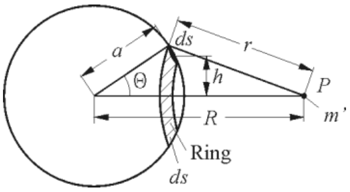
VI. Arbeitssatz in Anwesenheit von konservativen <u>und</u> nicht konservativen Kräften?

Der Arbeitssatz in der allgemeinen Form $K_2 - K_1 = W$ gilt immer. Die Arbeit können wir schreiben als $K_2 - K_1 = W = W_{kons} + W_{nichtkons}$

Für die Arbeit der konservativen Kräfte gilt $W_{kons} = U_1 - U_2$. Der Arbeitssatz nimmt die Form $K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + W_{nichtkons}$ an oder

$$\boxed{K_1 + U_1 = K_2 + U_2 - W_{nichtkons}}.$$

VII. Gravitationsfeld einer Kugel



Eine dünne Kugelschale mit Masse m.

Masse des infinitesimalen Ringes:

$$dm = m\frac{dA}{4\pi a^2} = m\frac{2\pi h \cdot a d\theta}{4\pi a^2} = m \cdot \frac{\sin\theta \cdot d\theta}{2}.$$

Die durch den Ring erzeugte potentielle Energie: $dU = -\frac{Gm'dm}{r} =$

$$= -G\frac{m'm}{2}\frac{\sin\theta d\vartheta}{\sqrt{R^2 - 2Ra\cos\theta + a^2}}$$

Die volle potentielle Energie:

$$U = -\frac{Gm'm}{2}\int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2 - 2Ra\cos\theta + a^2}} =$$

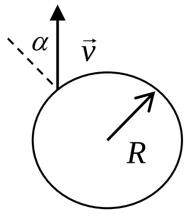
$$= \frac{Gm'm}{2Ra}\left[\sqrt{(R-a)^2} - \sqrt{(R+a)^2}\right]$$

a $R > a$: $U = -Gm'm/R$

b $R < a$: $U = -Gm'm/a$

IX. Anwendungsbeispiele

B1. Wie groß ist die Fluchtgeschwindigkeit für eine Rakete, die unter einem Winkel α zur Vertikalen gestartet wird?



<u>Lösung</u>:

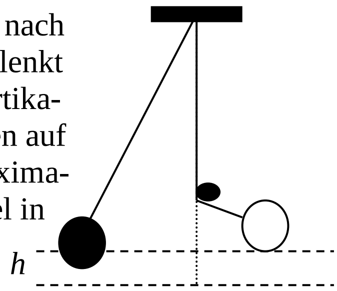
Am Anfang: $K_1 = \frac{mv^2}{2}$, $U_1 = -G\frac{Mm}{R}$

Am Ende: $K_2 = 0$, $U_2 = 0$.

Energieerhaltungssatz: $\frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = 0$.

Daraus $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$ - hängt vom Winkel α *nicht* ab!

B2. Ein Fadenpendel wird nach links bis zur Höhe *h* ausgelenkt und losgelassen. In der vertikalen Position stößt der Faden auf ein Hindernis. Welche maximale Höhe erreicht das Pendel in der rechten Position?



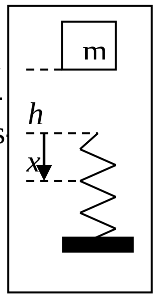
<u>Lösung:</u>

Am Anfang: $K_1 = 0$, $U_1 = mgh$

Am Ende: $K_2 = 0$, $U_2 = mgh_2$.

Zwangskräfte bleiben unberücksichtigt. Aus dem Energieerhaltungssatz folgt $h_2 = h$.

B3. Im Abstand *h* über dem Ende einer ungespannten Feder befindet sich eine Masse *m*. Sie wird ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen. Wie groß ist die maximale Zusammendrückung der Feder?



<u>Lösung:</u> Sowohl die Gravitationskraft als auch die elastische Kraft sind konservativ. Es gilt der Energieerhaltungssatz.

Am Anfang: $K_1 = 0$, $U_1 = mgh + 0$

Am Ende: $K_2 = 0$, $U_2 = -mgx + c\frac{x^2}{2}$

Energiesatz: $mgh = -mgx + c\frac{x^2}{2}$. Daraus

$$x = \frac{mg}{c}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2hc}{mg}}\right].$$ Sonderfall: Bei $h = 0$

ist $x = 2mg/c$ - zwei Mal größer, als bei statischer Belastung.