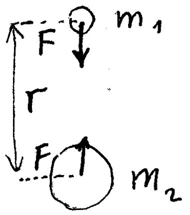
Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 4.

Kräfte: Schwerkraft, Reaktionskräfte, Widerstandskräfte, Federkraft, Auftriebskraft, Scheinkräfte. **Literatur:** ***Hauger, Schnell und Gross.*** **Technische Mechanik III, 1.2.3, 1.2.4.**

I. Gravitationskraft: Jedes Objekt zieht jedes andere Objekt mit einer Kraft an, welche proportional zu beiden Massen und umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung zwischen ihnen ist. Die Kraft ist entlang der Verbindungslinie zwischen beiden Körpern gerichtet.



$$\boxed{|F| = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

Gravitationskonstante: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$

II. Widerstandskraft (turbulent)

Ein fahrendes Auto oder ein Flugzeug erfahren eine Widerstandskraft,

die annähernd mit der folgenden Gleichung wiedergegeben wird:

$$\boxed{|F_w| = \tfrac{1}{2} c_w \rho A v^2}.$$

Dabei ist A die Projektionsfläche des Körpers auf eine Ebene senkrecht zur Anströmrichtung, ρ ist die Dichte des Mediums (z.B. Luft), v ist die Anströmgeschwindigkeit (bzw. Fahrgeschwindigkeit) und der *Widerstandsbeiwert* c_w erfasst alle weiteren Parameter. Er liegt z.B. bei modernen Pkw zwischen 0.3 und 0.4. Das Kraftgesetz ist nur gültig bei schnellen Bewegungen, bei denen sich *eine turbulente Strömung* bildet.

III. Widerstandskraft (Laminar)

Bewegt sich der Körper in einer Flüssigkeit oder einem Gas so langsam, dass sich keine Wirbel bilden (laminare Umströmung), so ist die Widerstandskraft, wie das bereits Newton herausgefunden hat, proportional zur Geschwindigkeit:

$$\boxed{F_w = -\alpha v}.$$

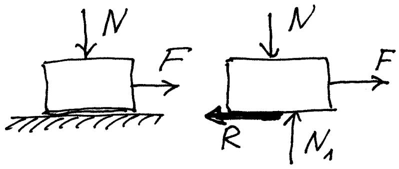
Die Konstante α hängt von der Geometrie des umströmten Körpers und von der *Zähigkeit* des Mediums ab, diesmal aber nicht von seiner Dichte. Das Minus-Vorzeichen zeigt, dass die Kraft entgegengesetzt zur Geschwindigkeit gerichtet ist. Für eine Kugel gilt z.B.:

$$F_w = -6\pi\eta r v.$$

(1854 Stokes); r ist hier Radius der Kugel, η - Viskosität des Mediums. (Z.B. für Wasser bei 20°C ist $\eta \approx 10^{-3}\, Pa \cdot s$, für die Luft bei 20°C $\eta \approx 1,8 \cdot 10^{-5}\, Pa \cdot s$).

IV. Haftreibung und Gleitreibung

Durch ausführliche experimentelle Untersuchungen hat Coulomb (1736-1806) festgestellt, dass die Reibungskraft R zwischen zwei Körpern, die mit der Normalkraft N an einander gedrückt sind, in erster, grober Näherung folgende einfache Eigenschaften hat:



A. Die ***<u>Haftreibung</u>*** (auch *statische Reibungskraft*) R_s, die zu überwinden ist, um den Körper in Bewegung zu setzen, ist proportional zur Anpresskraft *N*:

$$\boxed{R_s = \mu_s N}.$$

Der Koeffizient μ_s heißt *statischer Reibungskoeffizient.* Er hängt von der Materialpaarung ab, weist aber dagegen fast keine Abhängigkeit von der Kontaktfläche und Rauigkeit der Oberflächen auf.

B. Die ***<u>Gleitreibung</u>*** (auch *kinetische Reibungskraft*) R_k ist die Widerstandskraft, die *nach* dem Überwinden der Haftung wirkt.

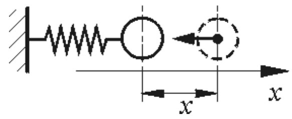
- Gleitreibung ist proportional zur Anpresskraft *N*

$$\boxed{R_k = \mu_k N}$$

- Die Gleitreibung hängt nicht (bzw. nur sehr schwach) von der Gleitgeschwindigkeit ab.

V. Elastische Kraft

Alle Körper in der Welt sind mehr oder weniger deformierbar. *Bei Federn* ist ihre Elastizität besonders ausgeprägt und wird technisch genutzt. Verschiebt man einen mit einer Feder gekoppelten Körper um x aus seiner Gleichgewichtsposition, so wirkt die Feder auf ihn mit der Kraft

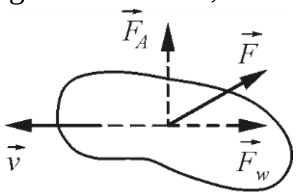


$$\boxed{F_{el} = -cx}.$$

Dabei ist c die *Steifigkeit* der Feder.

VI. Auftriebskraft

(a) Bewegt sich ein nicht symmetrischer Körper in einer Flüssigkeit oder Luft, so ist die auf ihn vom Medium wirkende Kraft im Allgemeinen nicht entgegengesetzt zur Geschwindigkeit gerichtet.



Die entgegengesetzte Komponente der Kraft nennt man Widerstandskraft (s. oben). Die zur Bewegung senkrecht gerichtete Komponente heißt *Auftriebskraft*. Beide sind bei turbulenten Umströmungen ungefähr proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit.

Für dünne stromlinienförmige Körper (wie ein Flügel) gilt

$$\boxed{|F_A| = \pi\alpha\rho v^2 S}$$

wobei S die Fläche des Flügels ist und α der sogenannte *Anstellwinkel*.

(b) Darüber hinaus gibt es auch bei sehr langsamen Bewegungen die entgegen der Schwerekraft gerichtete *archimedische Auftriebskraft*, die gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist.

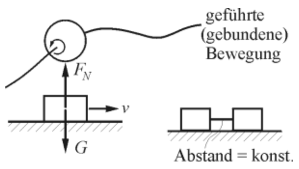
VII. Elektrische, magnetische Kräfte

Auf einen geladenen Körper im elektrischen Feld mit der Feldstärke $\vec{E}$ wirkt die Kraft $\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$, q ist die elektrische Ladung.

Auf einen geladenen Körper im magnetischen Feld mit der Induktion $\vec{B}$ wirkt die Kraft $\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}}$; sie ist stets senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtet.

VIII. Reaktionskräfte (auch Führungskräfte, Zwangskräfte)

Wenn ein Massenpunkt gezwungen ist, sich auf einer vorgegebenen Fläche oder Kurve zu bewegen, so spricht man von einer *geführten* oder *gebundenen* Bewegung. In diesem Fall treten die sogenannten *Reaktionskräfte* auf, welche gerade die geforderte Bindung an eine Fläche oder Kurve bewirken.

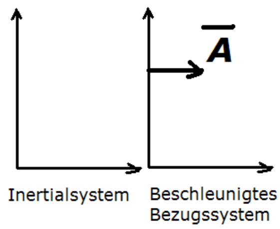


Für den Betrag der Reaktionskraft kann man kein spezielles Kraftgesetz angeben. Sie zeigt aber immer in die Richtung, in der die Bewegung verhindert wird.

IX. Scheinkräfte

Das 2. Newtonsche Gesetz gilt nur in *Inertialsystemen*. Manchmal ist es bequemer, eine Bewegung relativ zu einem sich beschleunigt bewegenden oder rotierenden Bezugssystem zu betrachten (die Erde ist z.B. auch kein ideales Inertialsystem). Man kann zeigen, dass man auch in einem beschleunigten System die Newtonschen Gesetze in gewöhnlicher Form anwenden kann, wenn man zusätzliche, sogenannte *Scheinkräfe* einführt.

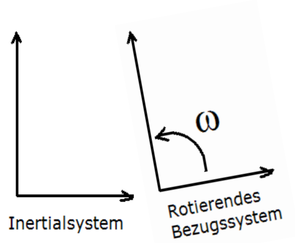
(a) In einem Bezugssystem, das sich relativ zu einem Inertialsystem mit der Beschleunigung $\vec{A}$ bewegt, muss die Scheinkraft



$$\boxed{\vec{F}_{transl} = -m\vec{A}}$$

eingeführt werden.

(b) In einem mit einer Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotierendem Bezugssystem müssen zwei Scheinkräfte eingeführt werden (diese Kraftgesetze werden im Kurs Mechanik III hergeleitet):

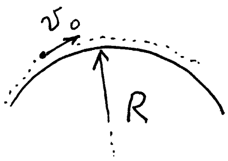


Zentrifugalkraft $\boxed{F_{zentrif} = mr\omega^2}$ wirkt radial *von* der Rotationsachse (r ist der Abstand zur Achse).

Coriolis-Kraft $\boxed{\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}}$.

Beispiel. Satellitenbewegung.

Mit welcher Geschwindigkeit umläuft die Erde ein erdnaher Satellit? Der Radius der Bahn sei $R = 6{,}4 \cdot 10^3\,km$.



Lösung. Die einzige Kraft, die auf den Satelliten wirkt, ist die Anziehungskraft der Erde (Schwerekraft). Sie ist immer zum Zentrum der Erde gerichtet und in der Nähe der Erdoberfläche gleich $|F_r| = mg$. Bewegt sich der Satellit auf einer Kreisbahn, so ist seine Beschleunigung ebenfalls zum Zentrum gerichtet und gleich $|a_r| = v_0^2 / R$. Nach dem 2.N.G. gilt $mv_0^2 / R = mg$. Daraus folgt

$$\boxed{v_0 = \sqrt{Rg} = \sqrt{6{,}4 \cdot 10^6 m \cdot 9{,}8 \tfrac{m}{s^2}} \approx 8 \cdot 10^3 m/s}$$