Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 3.

Newtonsche Gesetze der Dynamik. Bestimmung der Kraft bei vorgegebener Bewegung, Bestimmung der Bewegung bei vorgegebener Kraft. Schiefer Wurf.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Gross.*** **Technische Mechanik 1II, 1.2.1.-1.2.2.**

I. Newtonsche Gesetze (Newton, 1687).

1. Newtonsches Gesetz: Wirkt auf einen Körper keine Kraft, so führt er eine geradlinige, gleichförmige Bewegung aus: $\vec{v} = const$. (Auch als *Trägheitsgesetz* bekannt: Galilei, 1638).

2. Newtonsches Gesetz: $m\vec{a} = \vec{F}$ oder $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$: Masse mal Beschleunigung gleich Kraft. Dieses Gesetz gilt nur für ein *Inertialsystem.*

3. Newtonsches Gesetz: Kräfte, die zwei wechselwirkende Körper aufeinander ausüben, sind gleich groß, entgegengerichtet und haben eine gemeinsame Wirkungslinie.

Varianten der Schreibweise des 2.N.G.

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{oder} \quad m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \quad \text{oder} \quad m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}$$

oder $m\dot{\vec{v}} = \vec{F}$ oder $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$

Schreibweise in Komponenten:

$$\begin{cases} ma_x = F_x \\ ma_y = F_y \\ ma_z = F_z \end{cases} \text{oder} \begin{cases} m\dot{v}_x = F_x \\ m\dot{v}_y = F_y \\ m\dot{v}_z = F_z \end{cases} \text{oder} \begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}.$$

Einheit der Kraft ist $\frac{kg \cdot m}{s^2} \equiv N$ (1 Newton).

Bemerkung zum Sprachgebrauch:

Geschrieben in der Form $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, stellt das 2. N.G. eine Differentialgleichung bezüglich $\vec{r}(t)$ dar, die als *Bewegungsgleichung* bezeichnet wird (Engl.: "equation of motion"). Den Radiusvektor als Funktion der Zeit $\vec{r}(t)$ nennt man in diesem Zusammenhang *Bewegungsgesetz.*

II. Bestimmung der Kraft bei vorgegebener Bewegung

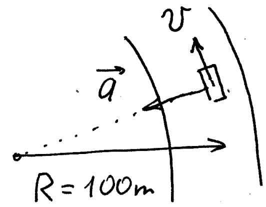
II. Bestimmung der Kraft bei vorgegebener Bewegung ist die einfachste Aufgabe der Dynamik. Ist das Bewegungsgesetz $\vec{r}(t)$ bekannt, so berechnet sich die Kraft nach dem 2. N.G. durch zweifaches Differenzieren.

Beispiel 1. Ein Körper (Masse *m*) führt eine eindimensionale Bewegung nach dem Gesetz $x(t) = a\sin\omega t$ (a und ω sind Konstanten). Zu bestimmen ist die auf ihn wirkende Kraft.

Lösung: Die erste Ableitung der Koordinate nach der Zeit liefert $\dot{x} = a\omega\cos\omega t$, nochmaliges Differenzieren ergibt $\ddot{x} = -a\omega^2\sin\omega t$. Die Kraft ist nach dem 2.N.G. gleich $F = m\ddot{x} = -ma\omega^2\sin\omega t$.

Beispiel 2. Kurvenfahrt.

Ein Auto (Masse $m = 1000\text{kg}$) durchfährt eine Kurve (Radius $R = 100m$) mit der Geschwindigkeit $v = 30\text{m/s}$ (108 km/h). Wie groß ist die Kraft, die auf es wirkt, wie ist sie gerichtet, was ist das für eine Kraft?



Lösung: Bei einer Bewegung auf einer Kreisbahn mit einer betragsmäßig konstanten Geschwindigkeit ist die Beschleunigung zum Zentrum des Kreises gerichtet und ist gleich $a_r = -v^2/R$. Nach dem 2. N.G. hat auch die Kraft nur die radiale Komponente:

$$F_r = ma_r = -m\frac{v^2}{R}.$$

$$|F_r| = m\frac{v^2}{R} = 10^3 kg\,\frac{30^2 m^2/s^2}{10^2 m} = 9\cdot 10^3\,\frac{kg\cdot m}{s^2} = 9\cdot 10^3 N$$

Das ist die *Reibungskraft* zwischen der Straße und den Reifen.

III. Bestimmung der Bewegung bei vorgegebener Kraft.

Ist die Kraft, die auf einen Körper wirkt, bekannt (oder ist das "Kraftgesetz" bekannt), so kann man die Bewegung bestimmen, indem man die Differentialgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ löst. Zur eindeutigen Bestimmung des Bewegungsgesetzes $\vec{r}(t)$ müssen die *Anfangsbedingungen* - die Lage und die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt bekannt sein.

Beispiel 3. Zu bestimmen ist die eindimensionale Bewegung unter der Einwirkung einer konstanten Kraft. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befand sich der Körper im Punkt x_0 und hatte die Geschwindigkeit v_0.

Lösung: Das 2.N.G. lautet $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F$. Indem wir beide Seiten mit $\mathrm{d}t$ multiplizieren $m\mathrm{d}v = F\mathrm{d}t$ und unbestimmt integrieren $\int m\mathrm{d}v = \int F\mathrm{d}t \Rightarrow \boxed{mv = Ft + C_1}$ erhalten wir die Geschwindigkeit. Das Ergebnis schreiben wir in der folgenden Form:

$m\dfrac{dx}{dt} = Ft + C_1$. Multiplikation mit dt:

$m dx = \left(Ft + C_1\right)dt$ und zweite unbestimmte Integration liefern $\int m dx = \int \left(Ft + C_1\right)dt + C_2$

$\Rightarrow \boxed{mx = \frac{1}{2}Ft^2 + C_1 t + C_2}$. Die noch unbekannten Integrationskonstanten C_1 und C_2 bestimmen wir aus den Anfangsbedingungen: $mx_0 = C_2$, $mv_0 = C_1$.

Daraus folgt $mx = \frac{1}{2}Ft^2 + mv_0 t + mx_0$ oder

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}\tfrac{F}{m}t^2}.$$

Für die Geschwindigkeit ergibt sich

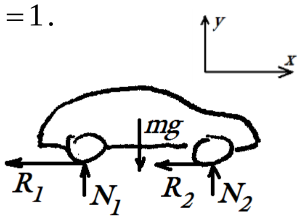
$$v = v_0 + \tfrac{F}{m}t .$$

<u>Bemerkung</u>: Diese Lösungsmethode funktioniert auch bei einer *beliebigen, explizit vorgegebenen* Kraft $F(t)$ als Funktion der Zeit. Die Beschleunigung ist dann auch eine gegebene Funktion der Zeit. Durch die erste Integration gewinnt man die Geschwindigkeit, durch die zweite die Koordinate. Die beiden Integrationskonstanten bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen.

Beispiel 4. Bremsweg bei Vollbremsung

Zu bestimmen ist der Bremsweg eines Autos mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 bei Vollbremsung. Der Reibungskoeffizient sei $\mu = 1$.

<u>Lösung:</u> Die auf das Auto wirkenden Kräfte werden durch den Freischnitt sichtbar gemacht.



2. N.G. lautet:

$m\ddot{y} = -mg + N_1 + N_2 = 0$, $m\ddot{x} = -R_1 - R_2$.

Aus der ersten Gleichung folgt $N_1 + N_2 = mg$

Die Reibungskräfte bei Vollbremsung erhalten wir nach dem Gesetz "Normalkraft$\times$Reibungskoeffizient": $R_1 = \mu N_1$, $R_2 = \mu N_2$. Daraus folgt $R_1 + R_2 = \mu\left(N_1 + N_2\right) = \mu mg$ und für die x-Komponente des 2.N.G. $m\ddot{x} = -\mu mg$. Das ist eine Bewegung unter Wirkung einer konstanten Kraft, daher gilt

$v = v_0 - \mu g t$

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 = 0 + v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2$

Aus der ersten Gleichung berechnet sich die Zeit bis zum Stillstand: $v = v_0 - \mu g t = 0 \;\Rightarrow\; t = v_0/\mu g$. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert den Weg bis zum Stillstand: $x_{Brems} = \dfrac{v_0^2}{\mu g} - \frac{1}{2}\dfrac{v_0^2}{\mu g} = \frac{1}{2}\dfrac{v_0^2}{\mu g}$.

Für $v_0 = 30 m/s$ (108 km/h) ist

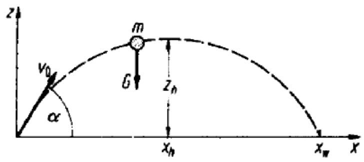
$$x_{Brems} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu g} \approx \frac{30^2 m^2/s^2}{2\cdot 1\cdot 10 m/s^2} = 45m$$

Für $v_0 = 15 m/s$ (54 km/h) ist $x_{Brems} \approx 11m$.

Für $v_0 = 8{,}5 m/s$ (ca. 30 km/h) $x_{Brems} \approx 3{,}5m$.

Beispiel 5. Schiefer Wurf

Ein Körper mit der Masse m wird zur Zeit $t = 0$ unter einem Winkel α zur x-Achse mit einer Geschwindigkeit v_0 abgeworfen.



Wenn der Luftwiderstand vernachlässigbar ist, wirkt als einzige Kraft das Gewicht G in negativer z-Richtung. Das 2. N.G. in kartesischen Koordinaten lautet

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{z} = -G = -mg .$$

Zweifache Integration führt nach Kürzen von m auf

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{z} = -gt + C_3$$

$$x = C_1 t + C_2, \quad z = -g\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4 .$$

Die Anfangsbedingungen:

$$\dot{x}(0) = C_1 = v_0\cos\alpha \quad \dot{z}(0) = C_3 = v_0 \sin\alpha$$

$$x(0) = C_2 = 0, \; z(0) = C_4 = 0 .$$

Einsetzen liefert

$$\dot{x} = v_0\cos\alpha, \; \dot{z} = -gt + v_0\sin\alpha,$$

$$x = v_0\cos\alpha\cdot t, \; z = -g\frac{t^2}{2} + v_0\sin\alpha\cdot t .$$

Durch Elimination der Zeit t: $t = x/v_0\cos\alpha$ erhält man die Bahngleichung

$$z = -\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha\cdot x$$

Der Körper bewegt sich auf einer Parabel.

Die Wurfweite x_w folgt aus der Bedingung $z(x_w) = 0$: $x_w = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$.

Die größte Wurfweite ergibt sich für $\alpha = \pi/4$, und sie beträgt $x_{w,\max} = v_0^2/g$.

Die Wurfhöhe ist gleich $z_h = (v_0\sin\alpha)^2/2g$.