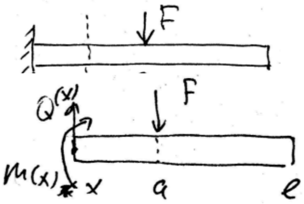
Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 9.
Schnittlasten im Balken unter Einzellasten (**Auszüge aus der Vorlesung**).
Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 7.2.1, 7.2.2.**

I. Schnittlasten im Balken bei Einzellasten

Es gibt nur wenige Möglichkeiten, einen Balken statisch bestimmt zu lagern: (a) einseitige Einspannung, (b) beidseitige gelenkige Lagerung, (c) Parallelführung an einem Ende plus gelenkige Lagerung am anderen. Belasten kann man entweder mit Einzelkräften oder Momenten. Im Weiteren betrachten wir typische Kombinationen aus Lagerungs- und Belastungsarten und berechnen für diese den Verlauf der Schnittlasten.

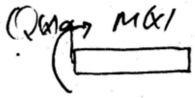
B1.



Wir schneiden frei einmal links vom Angriffspunkt der Kraft ($x < a$). Die Gleichgewichtsbedingungen sind:

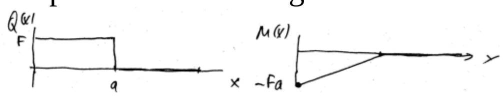
$Q(x) - F = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{Q(x) = F}$

$-M(x) - F(a-x) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{M(x) = F(x-a)}$.



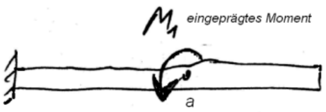
... und einmal rechts vom Angriffspunkt ($x > a$): $\boxed{Q(x) = 0}$, $\boxed{M(x) = 0}$.

Graphische Darstellung der Schnittlasten:

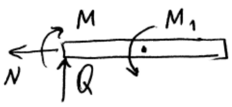


Im Angriffspunkt der Kraft gibt es einen Sprung der Querkraft um den Betrag der angreifenden Kraft.

B2.

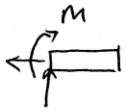


1\. $x < a$:



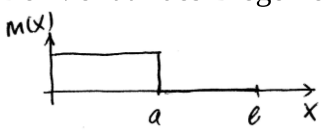
$\boxed{N(x) = 0,\; Q(x) = 0,\; -M(x) + M_1 = 0.}$

2\. $x > a$:

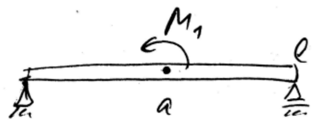


$\boxed{\begin{array}{r} N(x) = 0, \\ Q(x) = 0, \\ M(x) = 0. \end{array}}$

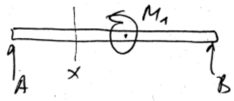
Der Verlauf des Biegemoments:



B3.



Zunächst schneiden wir den gesamten Balken frei:

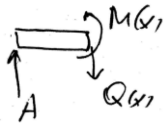


Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt:

$A + B = 0 \;\Rightarrow\; A = -B.$
$Bl + M_1 = 0 \;\Rightarrow\; B = -M_1 / l,\; A = M_1 / l.$

Dann schneiden wir bei x frei:

1\. $x < a$:

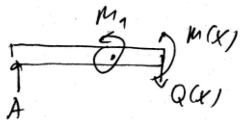


$A - Q(x) = 0,$
$M(x) - Q(x)x = 0.$

Aus der ersten Gleichung folgt: $\boxed{Q(x) = A}$.

Aus der zweiten folgt: $\boxed{M(x) = Ax = \frac{M_1}{l} x}$.

2\. $x > a$:



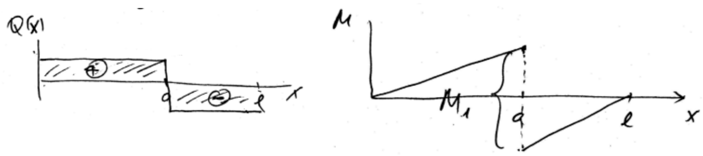
$A - Q(x) = 0$
$-Q(x) \cdot x + M(x) + M_1 = 0$

Aus der ersten Gleichung folgt: $\boxed{Q(x) = A}$.

Aus der zweiten folgt:

$\boxed{M(x) = Q(x)\,x - M_1 = \frac{M_1}{l} x - M_1}$.

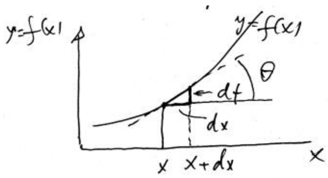
Grafische Darstellung der Schnittlasten:



II. Ein bisschen Mathematik

1. Ableitung:

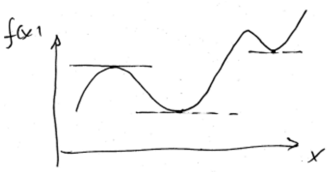
$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x+\mathrm{d}x) - f(x)}{\mathrm{d}x}.$$



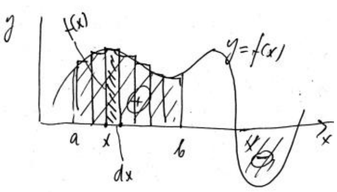
$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$:
Geometrische Interpretation: *Ableitung zeigt die Steigung der Funktion im Punkt x.*

2. Maxima und Minima:

Im Maximum oder Minimum (kurz Extremum) ist $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0$



3. Bestimmtes Integral:



Den Grenzwert der Summe $\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nennt man bestimmtes Integral der Funktion $f(x)$ nach x. *Geometrische Interpretation des Integrals: Flächeninhalt der Figur zwischen der Kurve* $f(x)$ *und der* $x-$*Achse von a bis b.*

4. Wie löst man Differentialgleichungen?

Gegeben seien zwei solche Funktionen $M(x)$ und $Q(x)$, sodass $\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = Q(x)$ gilt.

Ist $Q(x)$ bekannt und $M(x)$ zu bestimmen, so ist das eine Differentialgleichung. Zur Lösung schreiben wir sie zunächst in die folgende Form um: $\mathrm{d}M(x) = Q(x)\,\mathrm{d}x$. Dann integrieren wir entweder bestimmt oder unbestimmt.

(a) Bestimmte Integration:

$$\int_{x=a}^{x=b} \mathrm{d}M(x) = \int_a^b Q(x)\mathrm{d}x.$$

Wir berücksichtigen, dass

$\int_{x=a}^{x=b} \mathrm{d}M(x) = M(b) - M(a)$ ist. Somit ist

$$\boxed{M(b) - M(a) = \int_a^b Q(x)\mathrm{d}x}.$$

(Als Grenzen der Integration können auch Punkte innerhalb des Intervalls dienen).

(b) unbestimmte Integration:

$$\int \mathrm{d}M(x) = \int Q(x)\,\mathrm{d}x + C,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist.

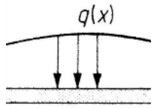
Wir berücksichtigen, dass $\int \mathrm{d}M(x) = M(x)$ ist.

Somit gilt:

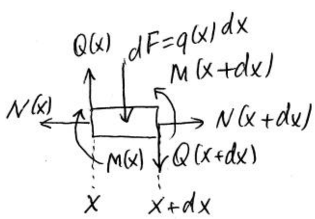
$$\boxed{M(x) = \int Q(x)\,\mathrm{d}x + C}.$$

III. Zusammenhang zwischen Belastung und Schnittgrößen

Ein Balken sei durch eine Streckenlast $q(x)$ belastet.



Wir schneiden einen infinitesimal kleinen Abschnitt des Balkens zwischen x und $x+dx$ frei:



Die Gleichgewichtsbedingungen liefern:

x:
$$N(x+\mathrm{d}x) - N(x) = 0$$

y:
$$Q(x+\mathrm{d}x) - Q(x) + q(x)\mathrm{d}x = 0$$

$M^{(x+\mathrm{d}x/2)}$:
$$-Q(x+\mathrm{d}x)\frac{\mathrm{d}x}{2} - Q(x)\frac{\mathrm{d}x}{2} + M(x+\mathrm{d}x) - M(x) = 0$$

Aus der ersten Gleichung folgt $N(x) = const$.

Die zweite kann in der Form

$$\frac{Q(x+\mathrm{d}x) - Q(x)}{\mathrm{d}x} = -q(x)$$

umgeschrieben werden. Das bedeutet:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} = -q(x)}. \qquad (1)$$

Die dritte Gleichung kann in der Form

$$\frac{M(x+\mathrm{d}x) - M(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{Q(x+\mathrm{d}x) + Q(x)}{2}$$

umgeschrieben werden. Das bedeutet:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = Q(x)}. \qquad (2)$$

(1) und (2) sind die **Schnittgrößendifferentialgleichungen**.