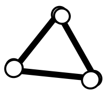
Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 7.

Fachwerke. Verfahren zur Ermittlung der Stabkräfte: Knotenpunktverfahren.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 6.1, 6.2, 6.3.1.**

I. Fachwerke



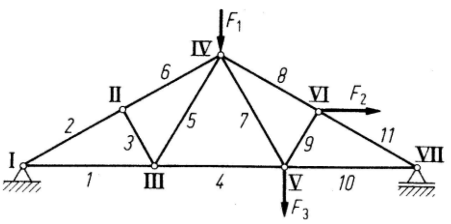
Grundelement eines Fachwerkes ist ein Dreieck. Auch bei einer gelenkigen Verbindung ist das ein starres Gebilde: $f = 9$, $v = 6$. Die Anzahl der restlichen Freiheitsgrade $n = 9 - 6 = 3$ ist so wie bei einem starren Körper. Die Erweiterung durch zwei weitere Stäbe (und 3 Gelenke) führt nicht zu einer Änderung der Zahl der Freiheitsgrade. Dieses Verfahren kann beliebig fortgesetzt werden.

II. Ideales Fachwerk

(1) Alle Stäbe sind reibungsfrei gelenkig verbunden
(2) Alle Kräfte greifen nur in den Knoten (Gelenken) an
(3) Alle Stäbe sind gewichtslos (folgt aus dem Punkt 2)

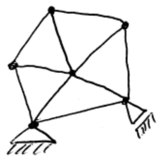
Aus den Gleichgewichtsbedingungen für jeden einzelnen Stab folgt, dass *in einem idealen Fachwerk alle Stäbe nur auf Zug oder Druck beansprucht sind*.

III. Statische Bestimmtheit von Fachwerken



Es ist üblich, die Stäbe mit arabischen Zahlen und die Knoten mit römischen Zahlen zu nummerieren. Dank den Annahmen eines idealen Fachwerkes brauchen wir nicht die Gleichgewichtsbedingungen für die Stäbe aufzustellen. Stattdessen schneiden wir eine kleine Umgebung eines Knotens frei. An der wirkt nun eine zentrale Kräftegruppe. Zur Ermittlung der Stabkräfte stehen *zwei* Kräftegleichgewichtsbedingungen *an jedem Knoten* zur Verfügung. Damit erhalten wir im obigen Beispiel insgesamt $7 \times 2 = 14$ Gleichungen zur Bestimmung der 14 Unbekannten (11 Stabkräfte und drei Lagerkräfte).

Bei einem ebenen Fachwerk mit *k* Knoten, *s* Stäben und *r* Lagerreaktionen hat man *2k* Gleichungen für *s* + *r* Unbekannte. Die *notwendige Bedingung* für die statische Bestimmtheit ist $\boxed{2k = s + r}$.

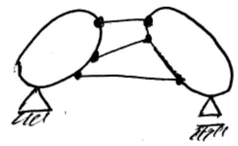


Ist dieses Fachwerk statisch bestimmt?

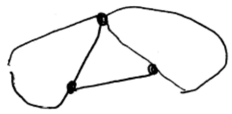
IV. Bildungsgesetze für Fachwerke

(1) Weitere Dreiecke hinzufügen $\Rightarrow$ *Einfaches Fachwerk*

(2) Zwei einfache Fachwerke starr (aber statisch bestimmt, d.h. *dreiwertig*) verbinden:



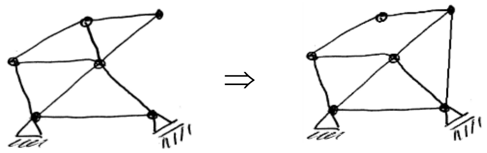
oder



- mit drei Stäben

- mit einem Gelenk und einem Stab

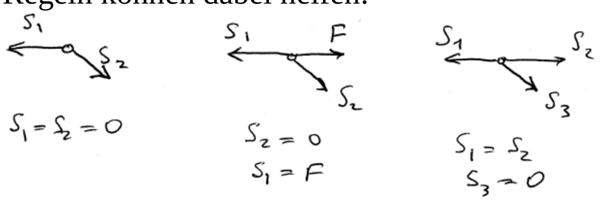
(3) Irgendwo einen Stab herausnehmen und woanders anbringen.



V. Ermittlung der Stabkräfte: Knotenpunktverfahren

Man schneidet alle Knotenpunkte frei und stellt für sie Kräftegleichgewichtsbedingungen auf.

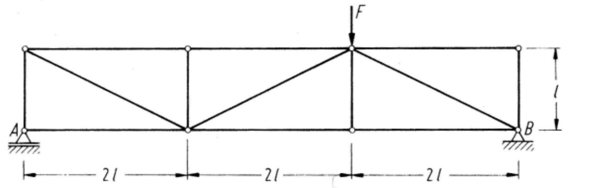
Oft ist es sinnvoll, *zunächst* die nicht belasteten Stäbe (*Nullstäbe)* zu finden. Folgende Regeln können dabei helfen:



Standardverfahren zur Ermittlung der Stabkräfte:

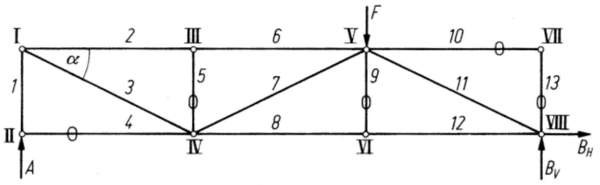
1. Alle Knoten und Stäbe nummerieren
2. Nullstäbe bestimmen
3. Das System als Ganzes freischneiden, Auflagerreaktionen bestimmen
4. Alle Knoten freischneiden und Stabkräfte auftragen
5. Kräftegleichgewicht für jeden einzelnen Knoten aufstellen
6. Das Gleichungssystem lösen
7. Alle Ergebnisse in eine Tabelle eintragen

B1. Das unten gezeigte Fachwerk wird durch die Kraft F belastet. Zu bestimmen sind alle Lager- und Stabkräfte.

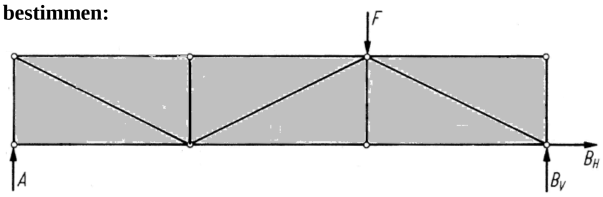


Lösung:

1. **Alle Knoten und Stäbe nummerieren**
2. **Nullstäbe bestimmen**



3. **Das System als Ganzes freischneiden, Auflagerreaktionen bestimmen:**



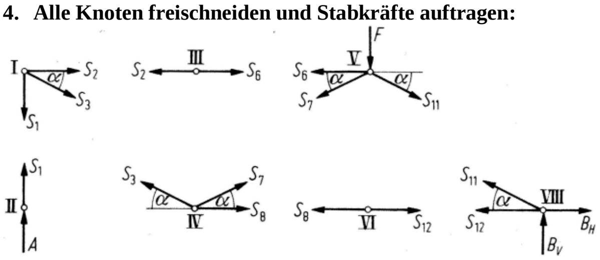
$$\boxed{B_H = 0}$$

$$M^{(A)}: -4lF + 6lB_v = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_v = \frac{2}{3}F}$$

$$M^{(B)}: \; 2lF - 6lA = 0 \;\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{3}F}$$

4. **Alle Knoten freischneiden und Stabkräfte auftragen:**



5. **Kräftegleichgewicht für jeden einzelnen Knoten aufstellen:**

I) →: $S_2 + S_3 \cos\alpha = 0$ 3

↑: $S_1 + S_3 \sin\alpha = 0$ 2

II) ↑: $S_1 + A = 0$ 1

III) →: $S_6 - S_2 = 0$ 4

IV) →: $S_8 - S_3 \cos\alpha + S_7 \cos\alpha = 0$

↑: $S_3 \sin\alpha + S_7 \sin\alpha = 0$

V) →: $-S_6 - S_7 \cos\alpha + S_{11} \cos\alpha = 0$

↑: $F + S_7 \sin\alpha + S_{11} \sin\alpha = 0$ 8

VI) →: $S_{12} - S_8 = 0$ 7

VIII) →: $B_H - S_{12} - S_{11} \cos\alpha = 0$ 6

↑: $B_v + S_{11} \sin\alpha = 0$ 5

6. **Das Gleichungssystem lösen:** Reihenfolge der Lösung

$$S_1 = -A = -\frac{1}{3}F \;;\; S_3 = -S_1/\sin\alpha = F/3\sin\alpha\;;$$

$$S_2 = S_6 = -S_3\cos\alpha = -F\cos\alpha/3\sin\alpha\;;$$

$$S_{11} = -B_v/\sin\alpha = -2F/3\sin\alpha\;;$$

$$S_{12} = S_8 = B_H - S_{11}\cos\alpha = 2F\cos\alpha/3\sin\alpha\;;$$

$$S_7 = -\frac{F}{\sin\alpha} + \frac{2F}{3\sin\alpha} = -\frac{F}{3\sin\alpha}\;;$$

Aus der Geometrie folgt:

$$\sin\alpha = 1/\sqrt{5},\; \cos\alpha = 2/\sqrt{5}.$$

Somit ergibt sich:

$$S_1 = -A = -\frac{1}{3}F\;;\; S_3 = -S_1/\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}F}{3}\;;$$

$$S_2 = S_6 = -\frac{2F}{3}\;;\; S_{11} = -\frac{2\sqrt{5}F}{3}\;;$$

$$S_{12} = S_8 = \frac{4F}{3}\;;\; S_7 = -\frac{\sqrt{5}F}{3}\;;$$

7. **Alle Ergebnisse in eine Tabelle eintragen**

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\frac{S_i}{F}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{2\sqrt{5}}{3}$	$\frac{4}{3}$	0

Ist das ein statisch bestimmtes Fachwerk?

...und dieser Brückenträger?