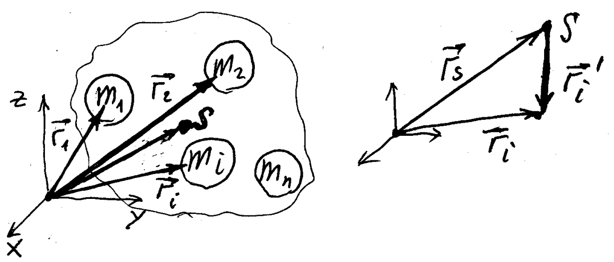
Schwerpunkt (Fortsetzung). Statische Bestimmtheit.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 4.1-4.4; 5.1.1, 5.1.2**

I. Schwerpunkt einer Gruppe von Massen



Gegeben sei ein System von kleinen, aber massiven Körpern, die alle starr miteinander verbunden sind. Auf den i-ten Körper wirkt die Schwerkraft $m_i\vec{g}$, wobei $\vec{g}$ die Fallbeschleunigung ist. Zu finden ist der Angriffspunkt der Resultierenden aller Kräfte (Schwerpunkt).

Lösung: Die Aufgabe kann umformuliert werden: Es ist der Punkt (S) zu finden, für den der Momentenvektor aller Kraftmomente bezüglich S Null ist. Die Lage des Punktes S ist durch die Gleichung

$$\vec{r}_s = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

gegeben.

Beweis: Es ist zu beweisen, dass das Gesamtkraftmoment bezüglich des oben angegebenen Punktes Null ist.

$$\begin{aligned}\vec{M}_S &= \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \vec{g} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_S\right) \times \vec{g} \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g} - \sum_i m_i \vec{r}_S \times \vec{g} = \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g} - \left(\vec{r}_S \times \vec{g}\right) \sum_i m_i = \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g} - \frac{\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{g}}{\sum m_i} \sum_i m_i \equiv 0\end{aligned}$$

In Koordinaten:

$$\boxed{x_s = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}}, \quad \boxed{y_s = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}}, \quad \boxed{z_s = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}}.$$

II. Schwerpunkt eines kontinuierlichen Körpers

Bei einem kontinuierlichen Körper werden Summen durch Integrale ersetzt:

$$x_s = \frac{\int x\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}, \quad y_s = \frac{\int y\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}, \quad z_s = \frac{\int z\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}.$$

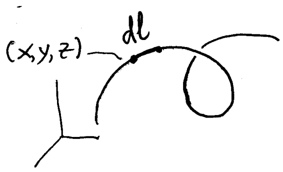
Das Differential der Masse kann als $dm = \rho dV$ geschrieben werden. Somit nehmen die obigen Gleichungen die folgende Form an:

$$x_s = \frac{\int x\,\mathrm{d}V}{\int \mathrm{d}V}, \quad y_s = \frac{\int y\,\mathrm{d}V}{\int \mathrm{d}V}, \quad z_s = \frac{\int z\,\mathrm{d}V}{\int \mathrm{d}V}.$$

Für eine homogene Scheibe mit der Flächendichte σ schreibt sich $dm = \sigma dA$ und die Koordinaten des Schwerpunkts nehmen die Form

$$x_s = \frac{\int x\,\mathrm{d}A}{\int \mathrm{d}A}, \quad y_s = \frac{\int y\,\mathrm{d}A}{\int \mathrm{d}A}, \quad z_s = \frac{\int z\,\mathrm{d}A}{\int \mathrm{d}A}$$ an.

Für eine Linie mit der Liniendichte λ gilt



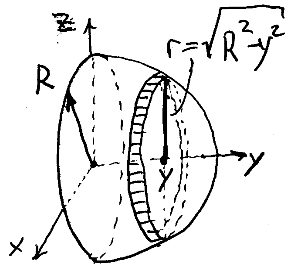
$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l$$

und

$$x_s = \frac{\int x\,\mathrm{d}l}{\int dl}, \quad y_s = \frac{\int y\,\mathrm{d}l}{\int dl}, \quad z_s = \frac{\int z\,\mathrm{d}l}{\int \mathrm{d}l}.$$

III. Beispiele

B1. Zu bestimmen ist die Lage des Schwerpunkts einer homogenen Halbkugel.



Lösung: Der Schwerpunkt liegt auf der *y*-Achse. Es ist deshalb nur die *y*-Koordinate zu bestimmen:

$$y_s = \frac{\int y\,\mathrm{d}V}{\int \mathrm{d}V}.$$

Wir schneiden die Halbkugel in dünne Scheiben parallel zur (*x*, *z*)-Ebene. Das Volumendifferential ist gleich

$$\mathrm{d}V = \pi r^2 \mathrm{d}y = \pi\left(R^2 - y^2\right)\mathrm{d}y.$$

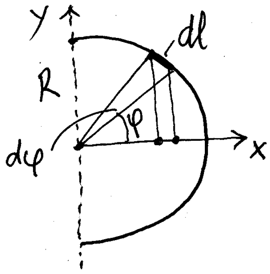
Die y-Koordinate des Schwerpunkts ist somit

$$y_s = \frac{\int_0^R y\pi\left(R^2 - y^2\right)\mathrm{d}y}{\int_0^R \pi\left(R^2 - y^2\right)\mathrm{d}y} = \frac{\int_0^R y\pi R^2 \mathrm{d}y - \int_0^R y\pi y^2 \mathrm{d}y}{\int_0^R \pi R^2 \mathrm{d}y - \int_0^R \pi y^2 \mathrm{d}y}$$

$$= \frac{\pi\left(R^2 R^2/2 - R^4/4\right)}{\pi\left(R^2 R - R^3/3\right)} = \frac{\pi R^4/4}{2\pi R^3/3} = \frac{3}{8}R$$

(Nenner: Volumen einer Halbkugel)

B2. Zu finden ist die Lage des Schwerpunkts eines Kreisbogens.



Lösung:

$$x_s = \frac{\int x \,\mathrm{d}l}{\int \mathrm{d}l} = \frac{\int x \,\mathrm{d}l}{\pi R}$$

Wenn wir zur Charakterisierung des laufenden Punktes am Kreisbogen den Winkel φ benutzen, so gilt:

$x = R\cos\varphi,\ \mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\varphi,\ \varphi\big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$. Somit: ist

$$x_s = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi}{\pi R} = \frac{R^2\left[\sin\varphi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}}{\pi R} = \frac{2}{\pi} R.$$

IV. Statische Bestimmtheit

Definitionen:

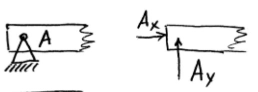
A) Die Zahl der *Freiheitsgrade f* ist die Zahl der unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten eines Körpers (bzw. eines Körpersystems). Z.B. gilt für einen Punkt im Raum $f = 3$ und für einen starren Körper im Raum $f = 6$. Dasselbe gilt für die Ebene entsprechend mit 2 und 3.

Bemerkung: Die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen ist immer gleich der Zahl der Freiheitsgrade.

B) Lager und Verbindungselemente sind *Bindungen*, die bestimmte Bewegungsarten verhindern.

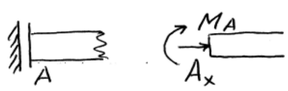
C) Die Anzahl der Freiheitsgrade, die eine Bindung einschränkt, heißt *Wertigkeit* der Bindung (des Lagers).

Bemerkung: Die Zahl der unbekannten Lagerreaktionen *r* ist immer gleich der Wertigkeit der Lager.

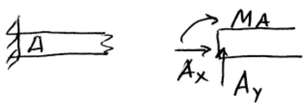


zweiwertig

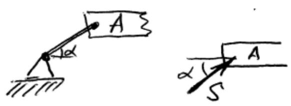
einwertig



zweiwertig



dreiwertig



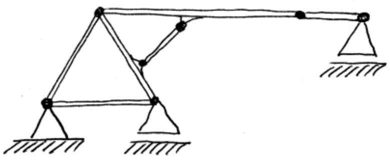
einwertig

D) Ein Tragwerk ist *statisch bestimmt*, wenn alle Lagerreaktionen eindeutig aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmbar sind.

E) Eine *notwendige Bedingung* für die statische Bestimmtheit ist, dass die Zahl der Gleichungen gleich der Zahl der Unbekannten ist, oder:

Bei einem statisch bestimmten System ist die Zahl der Freiheitsgrade gleich der Summe der Wertigkeiten aller Lager und Verbindungselemente.

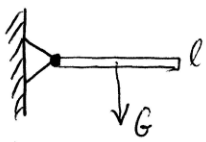
B1. Ist dieses Stabwerk statisch bestimmt?



(Antwort in der Vorlesung)

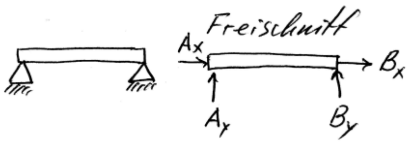
F) Ist die Zahl der Freiheitsgrade größer als die Wertigkeit der Lager (die Zahl der Gleichungen größer als die Zahl der Unbekannten) $\Rightarrow$ Gleichgewichtsgleichungen können nicht erfüllt werden - *kinematische Unbestimmtheit.*

B2.
Momentengleichung $Gl/2 = 0$ kann nicht erfüllt werden: Es gibt kein statisches Gleichgewicht.



G) Ist Die Zahl der Freiheitsgrade kleiner als die Wertigkeit $\Rightarrow$ Es gibt unendlich viele Gleichgewichtslösungen - *statische Unbestimmtheit.*

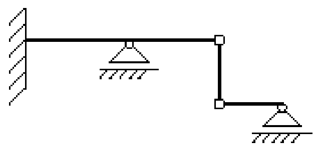
B3.



Gleichgewichtsgleichungen:
$A_x + B_x = 0,\quad A_y + B_y = 0,\quad B_y l = 0.$

Daraus folgt: $B_y = 0,\ A_y = 0,\ A_x = -B_x$. Die letzteren zwei Kräfte sind nicht eindeutig bestimmbar $\Rightarrow$ System ist statisch unbestimmt.

B4. Ist die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit bei dem abgebildeten System erfüllt? Geben Sie die von Ihnen benutzte Formel an! Benennen Sie die auftretenden Größen!



Ist dieses System statisch bestimmt?