

Kontaktmechanik mit der Methode der Dimensionsreduktion (MDR)

Lit.: V.L. Popov & M. Heß, *Method of Dimensionality reduction in contact mechanics and friction: A users handbook. I. Axially-symmetric contacts*, Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering, 2014, v. 12, N.1, pp.1-14.
<http://casopisi.junis.ni.ac.rs/index.php/FUMechEng/article/view/155/47> (open access)

I. Liste von Bezeichnungen:

E Elastizitätsmodul, G Schubmodul

ν Querkontraktionszahl

$E^* = E / (1 - \nu^2)$ effektiver Elastizitätsmodul

$G^* = 4G / (2 - \nu)$ effektiver Schubmodul

F oder F_N Normalkraft

a Kontaktradius, d Eindringtiefe

$f(r)$ dreidimensionales Profil

$g(x)$ 1D, MDR-transformiertes Profil

$p(r)$ Druckverteilung im Kontaktgebiet

$q(x)$ Streckenlast im äquivalenten Modell

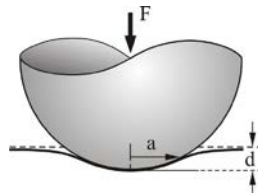
$f'(r)$, $q'(x)$ Ableitungen nach dem jeweiligen Argument

Δx Abstand zwischen Federn

c differenzielle Kontaktsteifigkeit

II. Kontakt elastischer Körper. Kontakte treten in unzähligen Anwendungen, wie Kuppelungen, Bremsen, Reifen, Gleit- und Kugellager. Kontakte können zur Übertragung von mechanischen Kräften (Schrauben), elektrischem Strom oder Wärme dienen bzw. einen Materialstrom verhindern (Dichtungen).

III. Kontaktgrößen vom Interesse. Wird ein starrer Körper in einen ausgedehnten elastischen Körper mit ebener Oberfläche ("elastischer Halbraum") mit einer Kraft F eingedrückt, so sinkt er um den Betrag d (*Eindringtiefe*) unter die ursprüngliche Oberfläche des elastischen Körpers. Dabei bildet sich ein Gebiet mit dem Radius a (Kontakttradius). Innerhalb des Kontaktgebietes herrscht bestimmte Spannungsverteilung $p(r)$, wobei r der polare Radius in der Kontaktfläche ist. Die Beziehungen zwischen den Größen F , d , a sowie die resultierende Spannungsverteilung sind die wichtigsten Größen welche Kontakteigenschaften bestimmen.



Kontaktsteifigkeit. Die Beziehung $F(d)$ definiert den Kontakt als eine "nichtlineare Feder". Wird die Eindringtiefe um einen kleinen Wert Δd geändert, so ändert sich auch die Eindringkraft um $\Delta F = F(d + \Delta d) - F(d)$.

Das Verhältnis $c = (\Delta F / \Delta d)$ wird die *differenzielle Steifigkeit* des Kontaktes genannt. Sie bestimmt die Dynamik des Systems mit der Kontaktstelle (z.B. Dynamik eines Schienenfahrzeugs). In der Kontaktmechanik wird gezeigt, dass die differenzielle Steifigkeit ausschließlich durch den Durchmesser $2a$ des Kontaktgebietes bestimmt wird:

$$c = 2aE^* \quad (1)$$

Elektrische Leitfähigkeit. Werden zwei elektrisch leitende Körper in Kontakt mit Radius a gebracht, so ist der *elektrische Widerstand* des Kontaktes, \tilde{R} , gleich

$$\tilde{R} = (\rho_1 + \rho_2) / (4a), \quad (2)$$

worin ρ_1 und ρ_2 die spezifischen Widerstände der beiden Körper bezeichnen.

Wärmeleitfähigkeit. Werden zwei Körper mit einer Temperaturdifferenz ΔT in Kontakt gebracht, so entsteht ein Wärmestrom ΔQ (Einheit J/s) vom wärmeren zum kälteren Körper hin. Der Proportionalitätskoeffizient zwischen beiden nennt man den *Wärmewiderstand* $R_{th} = \Delta T / \Delta Q$. Auch der Wärmewiderstand wird alleine durch den Kontaktradius bestimmt:

$$R_{th} = 1 / (4a\lambda^*) \quad (3)$$

mit $1/\lambda^* = 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2$. Darin bezeichnen λ_1 und λ_2 die spezifischen Wärmeleitfähigkeiten der beiden Körper.

Alle drei o.g. Größen hängen von dem Kontaktradius a ab.

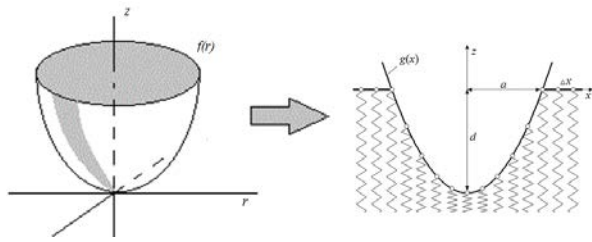
IV. Methode der Dimensionsreduktion.

Fragestellung: Ein starres rotationssymmetrisches Profil $z = f(r)$ sei in einen elastischen Körper mit der Normalkraft F_N um eine Indentierungstiefe d eingedrückt; den Kontaktradius sei a . Gesucht wird der Zusammenhang zwischen F_N , d und a sowie die Spannungsverteilung im Kontakt.

Lösungsschritte der MDR:

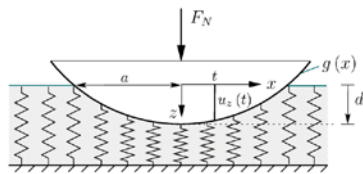
(1) Man definiert ein „MDR-transformiertes“ eindimensionales Profil

$$g(x) = |x| \int_0^{|x|} \frac{f'(r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr \quad (4)$$



(2) Anstelle des elastischen Halbraums wird eine lineare Reihe von unabhängigen Federn definiert, die sogenannte „Winklersche Bettung“, mit einem kleinen Abstand Δx und Normalsteifigkeit $k_z = E^* \Delta x$ und Tangentialsteifigkeit $k_x = G^* \Delta x$.

(3) Das eindimensionale Profil wird nun mit der Normalkraft F_N in die elastische Bettung eingedrückt.



V. Berechnungsschritte der MDR. Vertikale Verschiebung einer Feder an der Stelle x innerhalb des Kontaktgebietes ist gleich $u_z(x) = d - g(x)$. Am Rand des Kontaktes $x = a$ wird sie Null: $u_z(a) = 0 \Rightarrow$

$$d = g(a). \quad (5)$$

Die entsprechende Federkraft ist gleich Verschiebung mal Steifigkeit:

$$\Delta F_z(x) = \Delta k_z u_z(x) = E^* u_z(x) \Delta x.$$

Summe aller einzelnen Federkräfte ergibt die Normalkraft:

$$F_N := E^* \int_{-a}^a u_z(x) dx = 2E^* \int_0^a (d - g(x)) dx \quad (6)$$

Definieren wir noch die Streckenlast

$$q_z(x) = \frac{\Delta F_z(x)}{\Delta x} = E^* u_z(x) = E^* (d - g(x)). \quad (7)$$

Die Druckverteilung im ursprünglichen 3D Kontakt bestimmt sich dann laut:

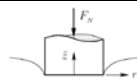
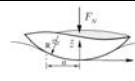
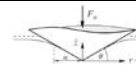
$$p(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{q'_z(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx \quad (8)$$

Die Gleichungen (5), (6) und (8) lösen vollständig das Kontaktproblem.

VI. Beispiele für Profiltransformation

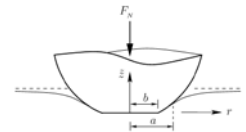
Durch Anwendung der Transformation (4) bekommt man für einen *flachen zylindrischen*

Stempel, eine *Kugel* und einen *Kegel* die folgenden transformierten Profile:

Tabelle I			
$f(r)$	$\begin{cases} 0, & r < a \\ \infty, & r > a \end{cases}$	$r^2 / 2R$	$r \tan \theta$
$g(x)$	$\begin{cases} 0, & x < a \\ \infty, & x > a \end{cases}$	x^2 / R	$\frac{\pi}{2} x \tan \theta$

Als ein weniger triviales Beispiel betrachten wir den Kontakt eines *parabolischen Profils mit verschlissener Spitze*:

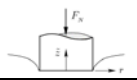
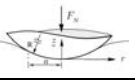
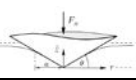
$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq r < b \\ r^2 - b^2 & \text{für } b \leq r \leq a \\ \frac{r^2 - b^2}{2R} & \text{für } b \leq r \leq a \end{cases}$$



Das MDR-transformierte Profil ist gleich



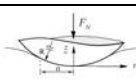



$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leq |x| < b \\ \frac{|x|}{R} \sqrt{x^2 - b^2} & \text{für } b \leq |x| < a \end{cases}$$

VII. Beispiele für die Berechnung des Kontaktradius und der Normalkraft. Einsetzen von MDR-transformierten Profilen aus Tabelle I in (5) ergibt den Kontaktradius a als Funktion der Eindringtiefe d . Weiteres Einsetzen in (6) ergibt die Normalkraft als Funktion der Eindringtiefe. Ergebnisse sind in der Tabelle II zusammengefasst.

Tabelle II			
a	a	\sqrt{Rd}	$\frac{2}{\pi} \frac{d}{\tan \theta}$
F_N	$2aE^* d$	$\frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2}$	$\frac{2}{\pi} E^* \frac{d^2}{\tan \theta}$

VIII. Beispiele für Druckverteilungen

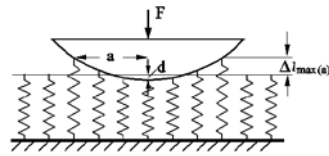
Einsetzen der Profile aus der Tabelle I in die Gleichung (7) und diese in (8) ergibt folgende Druckverteilungen:

	$p(r) = \frac{E^* d}{\pi a} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right)^{-1/2}$	
	$p(r) = \frac{2E^*}{\pi} \left(\frac{d}{R} \right)^{1/2} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2}$	
	$p(r) = \frac{E^*}{2} \tan \theta \cdot \ln \left(\frac{a}{r} + \sqrt{\left(\frac{a}{r} \right)^2 - 1} \right)$	

I. Adhäsiver Kontakt. Zwischen beliebigen Körpern gibt es relativ schwache und schnell mit dem Abstand zwischen den Oberflächen abfallende Wechselwirkungskräfte (van der Waals-Kräfte), die zur gegenseitigen Anziehung der Körper führen und als *Adhäsionskräfte* bekannt sind. Sie spielen eine wichtige Rolle in den Anwendungen, wo eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Die Oberflächen der Körper sind sehr glatt (wie z.B. die der magnetischen Scheibe von Festplatten)
- (ii) Einer der Kontaktpartner besteht aus einem sehr weichen Material (Gummi oder biologische Strukturen) oder
- (iii) Es handelt sich um mikroskopische Systeme (mikromechanische Geräte, Atomkraftmikroskope, biologische Strukturen u.ä.).

Anwendung der MDR: Wird der effektive Profil in die effektive Winklersche Bettung zunächst eingedrückt und dann gezogen, so werden die Federn am Rande des Kontaktes abspringen wenn die Auslenkung der Feder den kritischen Wert



$$\Delta l_{\max}(a) = \sqrt{\frac{2a\pi\gamma_{12}}{E^*}} \quad (9)$$

übersteigt, wobei γ_{12} die Trennungsarbeit pro Flächeneinhalt ist (*Regel von Heß*). Der kritische Kontaktradius im Moment der vollständigen Trennung beider Körper bestimmt sich aus

$$\left. \frac{dg(a)}{da} \right|_{a=a_c} = \sqrt{\frac{9\pi\gamma_{12}}{2a_c E^*}} \quad (10)$$

Die dabei wirkende Kraft wird *Adhäsionskraft* genannt. Sie ist gleich

$$F_A = 2E^* \left[a_c \Delta l_{\max}(a_c) - \int_0^{a_c} xg'(x) dx \right] \quad (11)$$

Der Zusammenhang zwischen der Normalkraft, der Eindringtiefe und dem Kontaktradius entsprechen dabei immer *exakt* denen des ursprünglichen dreidimensionalen Problems. Am einfachsten wird die Adhäsionskraft zwischen einem Zylinder mit dem Radius a und einem elastischen Halbraum berechnet. In diesem Fall ist das Integral in der Gleichung (3) gleich Null und die Adhäsionskraft wird alleine durch das erste Glied gegeben:

$$F_A = 2E^* a \Delta l_{\max}(a) = \sqrt{8\pi a^3 E^* \gamma_{12}} \quad (\text{Kendall, 1970}).$$

Für ein parabolisches Profil

$f(r) = r^2 / 2R$ gilt $g(x) = x^2 / R$. Die Gleichung (2) nimmt die Form $\frac{2a_c}{R} = \sqrt{\frac{9\pi\gamma_{12}}{2a_c E^*}}$ an.

Für den kritischen Radius folgt $a_c = \left(\frac{9\pi\gamma_{12} R^2}{8E^*} \right)^{1/3}$. Einsetzen in (3) ergibt die

Adhäsions-

$$\text{kraft } F_A = 2E^* \left[a_c \sqrt{\frac{2a_c \pi \gamma_{12}}{E^*}} - \frac{2}{3} \frac{a_c^3}{R} \right] = \frac{3}{2} \pi R \gamma_{12}$$

(*Johnson, Kendall, Roberts, 1971*). Berechnungen für andere Profile sind genauso einfach und sind in der unten folgenden Tabelle zusammengefasst.

Beispiele für adhäsive Normalkontakte

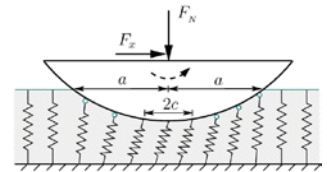
a_c	a	$\left(\frac{9\pi\Delta\gamma R^2}{8E^*} \right)^{1/3}$	$\frac{18\Delta\gamma}{\pi E^* \tan^2 \theta}$
F_A	$\sqrt{8\pi a^3 E^* \Delta\gamma}$	$\frac{3}{2} \pi \Delta\gamma R$	$\frac{54\Delta\gamma^2}{\pi \tan^3 \theta \cdot E^*}$

II. Tangentialkontakt. Betrachten wir einen axialsymmetrischen Indenter, der zunächst mit einer Normalkraft F_N in den elastischen Halbraum gedrückt und anschließend durch eine Tangentialkraft F_x in x -Richtung beansprucht wird. Bei kleiner Tangentialkraft entsteht am Rande des Kontaktgebietes ein ringförmiges Gleitgebiet, welches sich bei steigender Kraft nach Innen ausbreitet bis das vollständige Gleiten einsetzt. Den Radius des Haftgebietes bezeichnen wir durch c .

Anwendung der MDR: Ein solcher Tangentialkontakt wird innerhalb der MDR wie folgt gelöst: Das modifizierte Profil g wird in die Winklersche Bettung,

gekennzeichnet durch die Steifigkeiten gemäß $k_z = E^* \Delta x$ und

$k_x = G^* \Delta x$, mit der Normalkraft F_N eingedrückt und dann tangential um $u_x^{(0)}$ verschoben. Jede Feder haftet am Indenter und verschiebt sich zusammen mit ihm, solange die Tangentialkraft $\Delta F_x = k_x u_x^{(0)}$ kleiner $\mu \Delta F_z$ ist.



Nachdem die Haftkraft erreicht ist, beginnt die Feder zu gleiten und die Kraft bleibt konstant und gleich $\mu\Delta F_z$. In einem Tangentialkontakt mit dem Reibungskoeffizienten μ sind die Federn im Haftzustand wenn $|k_x u_x| < \mu k_z u_z$. Der Radius des Haftgebietes bestimmt sich aus der Gleichung $|k_x u_x^{(0)}| < \mu k_z u_z(c)$. Unter Berücksichtigung der Gleichung $u_z(x) = d - g(x)$ ergibt sich die bestimmende Gleichung

$$G^* u_x^{(0)} = \mu E^* (d - g(c)).$$

Maximale Verschiebung bis zum Beginn des Gleitens erhält man durch Einsetzen $c = 0$ (Verschwinden des Haftgebietes). Sie ist gleich $u_{x,\max} = \mu d (E^* / G^*) \approx 1.2 \cdot \mu d$ und wird nur durch die Eindringtiefe bestimmt (ist also unabhängig von der Form des Indenters). Die Tangentialverschiebung ist gleich

$$u_x(x) = \begin{cases} u_x^{(0)}, & \text{für } x < c \\ \mu \left(\frac{E^*}{G^*} \right) (d - g(x)), & \text{für } c < x < a \end{cases}$$

und die Streckenlast

$$q_x(x) = \begin{cases} G^* u_x^{(0)}, & \text{für } x < c \\ \mu E^* (d - g(x)), & \text{für } c < x < a \end{cases}$$

Für die Tangentialkraft ergibt sich

$$F_x = 2 \int_0^a q_x(x) dx = 2 \mu E^* \left[c(d - g(c)) + \int_c^a (d - g(x)) dx \right]$$

Die Normalkraft wird durch die Gleichung

$$F_N = E^* \int_{-a}^a u_z(x) dx = 2 E^* \int_0^a (d - g(x)) dx$$

gegeben und das Verhältnis $F_x / (\mu F_N)$ durch

$$\frac{F_x}{\mu F_N} = \frac{\int_0^a x g'(x) dx}{a g(a) - \int_0^a g(x) dx}.$$

Beispiele für Tangentialkontakte

1. Zylinder: Kein Gleitgebiet. Das Gleiten beginnt sofort in der gesamten Kontaktfläche.

$$2. \text{ Kugel: } u_x^{(0)} = \mu \frac{E^*}{G^*} \left(d - \frac{c^2}{R} \right), \quad \frac{F_x}{\mu F_N} = 1 - \left(\frac{c}{a} \right)^3.$$

$$3. \text{ Kegel: } u_x^{(0)} = \mu \frac{E^*}{G^*} \left(d - \frac{\pi}{2} c \tan \theta \right),$$

$$\frac{F_x}{\mu F_N} = 1 - \left(\frac{c}{a} \right)^2.$$

4. Potenzprofil $f(r) = c_n r^n$.

$$u_x^{(0)} = \mu \frac{E^*}{G^*} \left(d - \kappa_n c_n c^n \right), \quad \frac{F_x}{\mu F_N} = 1 - \left(\frac{c}{a} \right)^n.$$