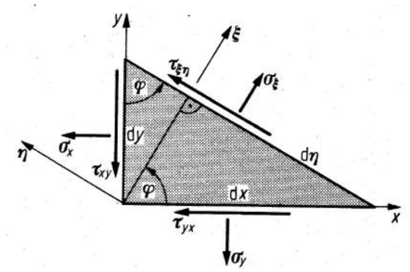
Hauptachsen des Spannungstensors, Hauptspannungen, Moorscher Spannungskreis

I. Koordinatentransformation eines Tensors



$$\sigma_\xi = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\varphi + \tau_{yx}\sin 2\varphi$$

$$\sigma_\eta = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) - \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\varphi - \tau_{yx}\sin 2\varphi$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

II. Invarianten des Spannungstensors

Es gibt Invarianten des Spannungstensors:

$I_1 = \sigma_x + \sigma_y$ (Spur der Matrix)

$I_2 = \sigma^2{}_x + \tau^2{}_{xy} + \tau^2{}_{yx} + \sigma^2{}_y$.

III. Hauptachsen und Hauptspannungen

1. Man kann die Achsen immer so wählen, dass die Schubspannungen verschwinden. Gleichzeitig nehmen die Zugspannungen (Diagonalkomponenten) ihren extremalen Wert an:

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y},$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} .$$

2. Es gibt immer Achsenrichtungen, bei denen die Schubspannungen ein Maximum erreichen:

$$\frac{d\tau_{\xi\eta}}{d\varphi} = -\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\tilde{\varphi} - 2\tau_{xy}\sin 2\tilde{\varphi} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\cot 2\tilde{\varphi} = -\frac{2\tau_{xy}}{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)} = -\tan 2\varphi^*$$

Dafür muss offenbar gelten: $2\tilde{\varphi} = 2\varphi^* + \pi/2$.

In der Tat gilt

$\cos 2\tilde{\varphi} = \cos\left(2\varphi^* + \pi/2\right) = -\sin\left(2\varphi^*\right)$,

$\sin 2\tilde{\varphi} = \sin\left(2\varphi^* + \pi/2\right) = \cos\left(2\varphi^*\right)$ und

$\cot 2\tilde{\varphi} = -\tan 2\varphi^*$.

Die Achsenrichtungen, in denen die Schubspannungen maximal sind, sind zu den Hauptachsen um 45° gedreht. Die Extremalwerte der Schubspannung heißen ***Hauptschubspannungen***:

$$\tau_{\max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} .$$

Mit Hilfe der Hauptspannungen gilt:

$$\tau_{\max} = \pm\frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right) .$$

Dabei sind die Normalspannungen

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_y + \sigma_x\right) = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right) .$$

IV. Mohrscher Spannungskreis

Schreibt man die Transformationsformeln um:

$$\sigma_\xi - \tfrac{1}{2}\left(\sigma_y + \sigma_x\right) = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_y - \sigma_x\right)\cos 2\varphi + \tau_{yx}\sin 2\varphi$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi ,$$

so kann durch Quadrieren und Addieren der Winkel φ eliminiert werden.

$$\left[\sigma_\xi - \tfrac{1}{2}\left(\sigma_y + \sigma_x\right)\right]^2 + \tau_{\xi\eta}^2 = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 .$$

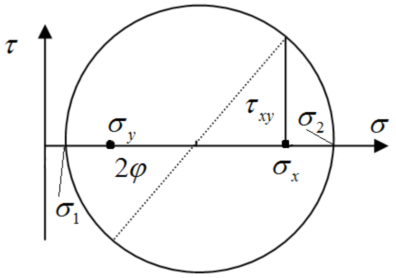
Den Ausdruck auf der rechten Seite bezeichnen wir als $\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = r^2$ und den Mittelwert der Diagonalspannungen als $\sigma_M = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_y + \sigma_x\right)$. Somit gilt für σ_ξ und $\tau_{\xi\eta}$

$$\left[\sigma_\xi - \sigma_M\right]^2 + \tau_{\xi\eta}^2 = r^2$$

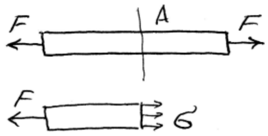
Im Weiteren lassen wie die Indizes aus:

$$\left[\sigma - \sigma_M\right]^2 + \tau^2 = r^2 .$$

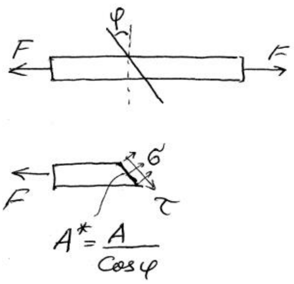
Dies ist die Gleichung eines Kreises in der (σ, τ) -Ebene mit dem Zentrum im Punkt σ_M und dem Radius r . Dese Überlegungen können zur graphischen Bestimmung von Hautspannungen, maximalen Schubspannungen und Hauptachsen benutzt werden. So geht es: Gegeben seien σ_x , σ_y und τ_{xy} . Der Punkt (σ_x, τ_{xy}) liegt auf dem Kreis, der Punkt $\left(\tfrac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right), 0\right)$ liegt in der Mitte des Kreises, somit ist der gesamte Kreis eindeutig bestimmt. An dem Kreis können jetzt problemlos die Hauptspannungen und die maximale Schubspannung abgelesen werden.



V. Spannungen bei einachsiger Dehnung



Betrachten wir einen axial mit einer Kraft F belasteten Stab. Wir machen einen Schnitt senkrecht zur Achse. Die einzige Schnittgröße ist in diesem Fall die Normalkraft $N = F$. Im Schnitt wirkt eine Zugspannung $\sigma = F/A$, die wir als σ_0 bezeichnen.



Machen wir jetzt bei demselben Stab einen schrägen Schnitt (Neigungswinkel φ), so wirkt im Schnitt natürlich immer noch dieselbe axiale Kraft. Sie kann aber jetzt in eine Komponente senkrecht zum Schnitt und eine parallel dazu zerlegt werden. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$\rightarrow$: $\sigma A^* \cos\varphi + \tau A^* \sin\varphi - F = 0$,

$\uparrow$: $\sigma A^* \sin\varphi - \tau A^* \cos\varphi = 0$.

Dann ist

$\sigma + \tau \tan\varphi = F/A$ und $\sigma \tan\varphi - \tau = 0$.

Daraus folgt

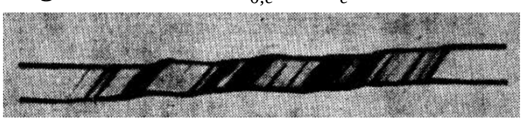
$$\tau = \frac{F}{A}\frac{\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi} = \frac{F}{A}\sin\varphi\cos\varphi = \frac{F}{2A}\sin 2\varphi$$

$$\sigma = \frac{F}{A}\frac{1}{1+\tan^2\varphi} = \frac{F}{A}\cos^2\varphi = \frac{F}{2A}\left(1+\cos 2\varphi\right)$$

oder

$$\tau = \frac{\sigma_0}{2}\sin 2\varphi\,, \quad \sigma = \frac{\sigma_0}{2}\left(1+\cos 2\varphi\right)$$

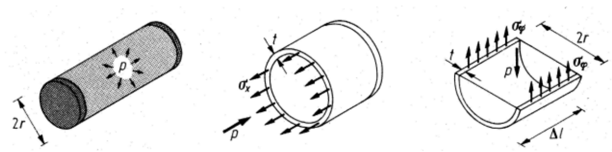
Tangentialspannungen erreichen ein Maximum bei $\varphi = \pi/4$. In vielen metallischen Stoffen beginnt plastische Deformation durch Gleiten in Richtung maximaler Schubspannungen (45° zur Zugachse). Bei solchen Stoffen hängen die Fließgrenzen beim Schub und beim Zug wie folgt zusammen: $\sigma_{0,c} = 2\tau_c$.



(Photo eines kleinen gedehnten Kupferkristalls)

VI. Dünnwandiger Kessel

Ein dünnwandiger zylindrischer Kessel mit dem Radius r und der Wandstärke t stehe unter dem Druck p. Zu ermitteln ist der Spannungszustand



Ein Schnitt senkrecht zur Achse ergibt die folgende Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma_x 2\pi r t - p\pi r^2 = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_x = \frac{pr}{2t}.$$

Ein Schnitt entlang der Achse ergibt:

$$2\sigma_\varphi t\Delta l - p2r\Delta l = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_\varphi = \frac{pr}{t}$$

Wegen $r \gg t$ gilt $\sigma_x, \sigma_\varphi \gg \sigma_r$. Der Spannungszustand kann daher als eben betrachtet werden.

Die maximale Schubspannung ist

$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right) = \frac{pr}{4t}$, sie wirkt in Schnitten unter 45° zur Achse.

Plastische Deformation wird daher in Richtung 45° initiiert werden. Der Riß breitet sich aber in der Längsrichtung aus.