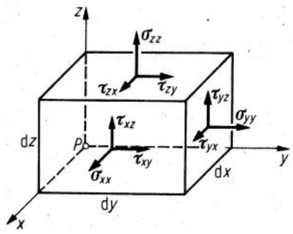
Spannungstensor

I. Spannungstensor



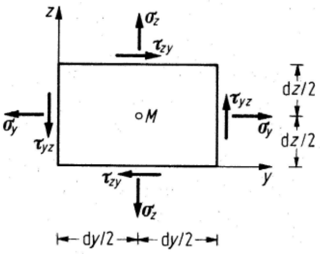
Den Spannungszustand eines Mediums charakterisiert man, indem man im gegebenen Punkt verschiedene Schnitte macht und die dort wirkenden Spannungen untersucht.
Betrachten wir die drei Schnitte senkrecht zu den x, y und z- Achsen. Diese Schnittspannungen werden mit zwei Indizes gekennzeichnet, von denen der erste den Normalvektor zum Schnitt angibt und der zweite die Richtung der im Schnitt wirkenden Kraftkomponente. Insgesamt gibt es 9 Spannungskomponenten, die man in einer Matrix (***Spannungstensor***) anordnen kann:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

oder

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{pmatrix}.$$

II. Symmetrie des Spannungstensors



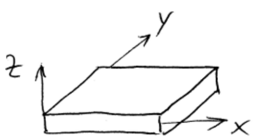
Untersuchen wir das Momentengleichgewicht für ein infinitesimal kleines Volumenelement mit Abmessungen dx, dy und dz um eine zur *x*-Achse parallele Achse (bezüglich des Mittelpunktes):

$$2\frac{dy}{2}\tau_{yz}dxdz - 2\frac{dz}{2}\tau_{zy}dxdy = 0 \;\Rightarrow\; \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}}$$

Es gibt somit nur *6 unabhängige Komponenten* des Spannungstensors.

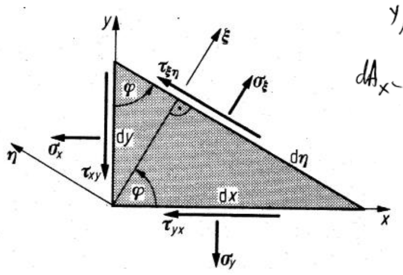
III. Ebener Spannungszustand

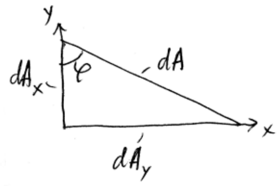


Betrachten wir eine homogene Platte, die nur in ihrer Ebene beansprucht wird (bleibt also auch im deformierten Zustand eben). Alle Kräfte an ihren Flächen verschwinden. Das bedeutet, dass $\tau_{zx} = \tau_{zy} = \sigma_z = 0$. Aus der Symmetrieeigenschaft folgt: $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

IV. Koordinatentransformation





$dA_y = dA\sin\varphi$

$dA_x = dA\cos\varphi$

Betrachten wir einen ebenen Spannungszustand und schneiden aus dem Medium ein infinitesimal kleines Dreieck.
Betrachten wir das Kräftegleichgewicht in den Achsen (ξ,η), die relativ zu den Achsen (x,y) um den Winkel φ gedreht sind.

$$\xi: \quad \begin{aligned} &\sigma_\xi dA - \left(\sigma_y dA_y\right)\sin\varphi - \left(\tau_{yx} dA_y\right)\cos\varphi \\ &-\left(\sigma_x dA_x\right)\cos\varphi - \left(\tau_{xy} dA_x\right)\sin\varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\eta: \quad \begin{aligned} &\tau_{\xi\eta} dA - \left(\sigma_y dA_y\right)\cos\varphi + \left(\tau_{yx} dA_y\right)\sin\varphi \\ &+\left(\sigma_x dA_x\right)\sin\varphi - \left(\tau_{xy} dA_x\right)\cos\varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sigma_\xi = \sigma_y \sin^2\varphi + \tau_{yx}\sin\varphi\cos\varphi + \sigma_x\cos^2\varphi + \tau_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \\ \tau_{\xi\eta} = \sigma_y\sin\varphi\cos\varphi - \tau_{yx}\sin^2\varphi - \sigma_x\sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy}\cos^2\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_\xi = \sigma_y\sin^2\varphi + 2\tau_{yx}\sin\varphi\cos\varphi + \sigma_x\cos^2\varphi \\ \tau_{\xi\eta} = -\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \\ \sigma_\eta = \sigma_y\cos^2\varphi - 2\tau_{yx}\sin\varphi\cos\varphi + \sigma_x\sin^2\varphi \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_\xi &= \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\varphi + \tau_{yx}\sin 2\varphi \\ \sigma_\eta &= \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) - \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\varphi - \tau_{yx}\sin 2\varphi \\ \tau_{\xi\eta} &= -\tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi \end{aligned}}$$

Schlußfolgerungen:

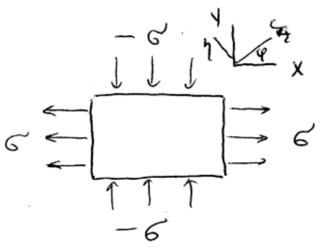
1. Die vier Komponenten des Spannungstensors (in 2D) und 9 (in 3D) bestimmen vollständig den Spannungszustand.
2. Es gibt Invarianten des Spannungstensors:
$I_1 = \sigma_x + \sigma_y$ (Spur der Matrix)
$I_2 = \sigma^2{}_x + \tau^2{}_{xy} + \tau^2{}_{yx} + \sigma^2{}_y$.

Beispiele:
B1. In einem Koordinatensystem gilt $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, $\tau_{xy} = 0$. Zu bestimmen ist der

Spannungszustand in einem beliebig orientierten Koordinatensystem.

Lösung: $\sigma_\xi = \sigma_\eta = \sigma$, $\tau_{\xi\eta} = 0$. Diesen Spannungszustand nennt man *hydrostatischen Spannungszustand.*

B2. Ein Block ist in einer Richtung auf Zug und in Querrichtung auf Druck mit der gleichen Spannung σ belastet. Zu bestimmen ist der Spannungstensor in einem beliebig orientierten Koordinatensystem.



Lösung: $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = -\sigma$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$

$\sigma_\xi = \sigma \cos 2\varphi$, $\sigma_\eta = -\sigma \cos 2\varphi$,

$\tau_{\xi\eta} = -\sigma \sin 2\varphi$.

Für $\varphi = \pi / 4$ ist $\sigma_\xi = 0$, $\sigma_\eta = 0$, und

$\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi} = -\sigma$.

Im Koordinatensystem (x,y) ist das Material auf Zug und Druck beansprucht, und im System (ξ,η) ist das reiner Schub.

B3. Ein Material wird auf reinen Schub beansprucht. Zu bestimmen ist der Spannungstensor in einem beliebig orientierten System.

Lösung: $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$.

$\sigma_\xi = \tau \sin 2\varphi$, $\sigma_\eta = -\tau \sin 2\varphi$, $\tau_{\xi\eta} = \tau \cos 2\varphi$.

Für $\varphi = \pi / 4$ gilt $\tau_{\xi\eta} = 0$, $\sigma_\xi = \tau$, $\sigma_\eta = -\tau$.

(Ein sprödes Material bricht typischerweise senkrecht zur maximalen *Zugspannung*. Sprödes Material wird deshalb Bruch unter 45° zur Schubrichtung erleiden).

B4. Eine Säule ist auf Druck belastet ($\sigma_x = -\sigma$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$). In welchem Querschnitt ist die Schubspannung maximal?

$\tau = \left(-\sigma / 2\right) \sin 2\varphi$. $\varphi = 45°$ (Versagenswinkel zäher Stoffe unter Druck oder Zug).