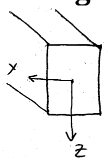
Biegung und Längskraft.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 4.4., 4.8**

I. Biegung und Längskraft



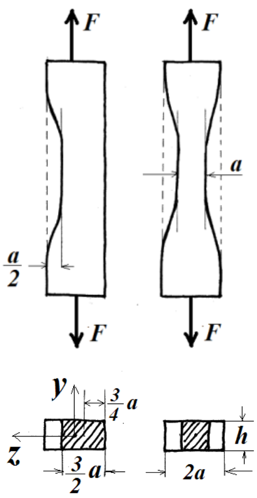
Betrachten wir wieder einen Balken mit einem symmetrischen Profil. Wird er mit einem Kraftmoment M_y belastet, so wird die Spannungsverteilung im Querschnitt durch $\sigma = \frac{M_y}{I_y} z$ gegeben. Bei einer Belastung mit einem Kraftmoment M_z ist die Spannungsverteilung $\sigma = -\frac{M_z}{I_z} y$. Ist der Balken mit einer Normalkraft *N* belastet (in axialer Richtung), so ist die Zugspannung im Querschnitt homogen und gleich $\sigma = \frac{N}{A}$. Wirken gleichzeitig beide Momente und Normalkraft, so erhält man die Spannung als Summe von drei o.g. Beiträgen (Superpositionsprinzip):

$$\boxed{\sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{N}{A}}$$

Die Lage der neutralen Fläche bestimmt sich aus der Forderung $\sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{N}{A} = 0$.

Ist $N = 0$, so ist das eine Gerade $z = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} y$ durch den Koordinatenursprung (Schwerpunkt des Querschnitts). Ist $N \neq 0$, so ist das eine verschobene Gerade $z = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} y - \frac{N I_y}{M_y A}$.

B1. Proben mit symmetrischer und nicht symmetrischer Verjüngung:



Zu vergleichen sind die maximalen Zugspannungen, die im Querschnitt von nebenstehend skizzierten Proben wirken.

Lösung: Die rechte Probe ist symmetrisch beansprucht, so daß nur reine homogene Zugspannung vorliegt und die Spannung sich einfach als Verhältnis der Kraft zur Querschnittsfläche berechnet: $\boxed{\sigma_{\max}^{rechts} = F/ah}$.

Die linke Probe dagegen ist nicht symmetrisch beansprucht. Bezüglich des Schwerpunkts des verjüngten Querschnitts hat die Kraft $\vec{F}$ ein Moment: $M_y = Fa/4$. Die Spannungen im Querschnitt setzen sich daher zusammen aus den Zugspannungen durch die Kraft $\vec{F}$ und den Zugspannungen durch Biegung mit dem Moment $M_y = Fa/4$. Die letzten erreichen ihr Maximum an der Oberfläche der Probe (im Abstand $\frac{3}{4}a$ vom Schwerpunkt des Querschnitts). Die maximale Spannung ist daher gleich

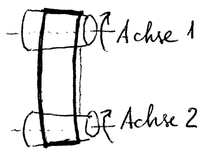
$$\sigma_{\max}^{links} = \frac{F}{\frac{3}{2}ah} + \frac{M_y}{I_y}\frac{3}{4}a = \frac{2F}{3ah} + \frac{12Fa}{4h\left(\frac{3}{2}a\right)^3}\frac{3}{4}a =$$

$$= \frac{2F}{3ah} + \frac{2F}{3ah} = \boxed{\frac{4F}{3ah}}$$

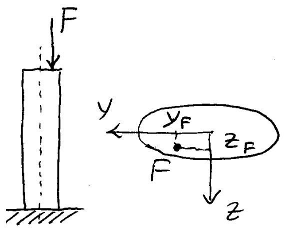
Sie ist trotz des größeren Querschnitts größer als bei der symmetrischen Probe.

B2. Riemen als Balken

Auch Objekte, die keinen Druck aushalten, können als Balken behandelt werden, wenn sie so gespannt sind, daß an keinem Punkt Druckspannungen wirken.



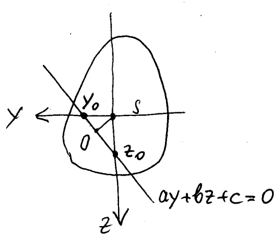
II. Außermittiger Zug (Druck)



Wir betrachten eine Säule unter einer exzentrischen Druckkraft *F*. Die Kraft erzeugt sowohl eine Dehnung in der Achsenrichtung als auch Biegemomente um die Achsen *y* und *z*: $M_z = +F y_F$, $M_y = -F z_F$, $N = -F$. Die Lage der neutralen Fläche wird gegeben durch

$$\frac{F z_F}{I_y} z + \frac{F y_F}{I_z} y + \frac{F}{A} = 0, \quad \boxed{\frac{z_F}{I_y} z + \frac{y_F}{I_z} y + \frac{1}{A} = 0}$$

Ein bisschen analytische Geometrie.
Gleichung einer Geraden $ay + bz + c = 0$ kann in der Form $y/y_0 + z/z_0 = 1$ geschrieben werden mit $y_0 = -c/a$, $z_0 = -c/b$.

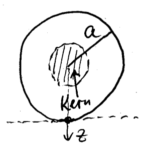


Der Abstand vom Koordinatenursprung zur Geraden ist gleich

$$OS = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y_0^2}+\frac{1}{z_0^2}}} = \frac{1/A}{\sqrt{\left(\frac{z_F}{I_y}\right)^2+\left(\frac{y_F}{I_z}\right)^2}}$$

Damit die gesamte Fläche auf Druck beansprucht wird, muss die neutrale Fläche *außerhalb* des Querschnitts liegen. Die Gesamtheit aller Angriffspunkte der Kraft, für die diese Bedingung erfüllt ist, heißt ***Querschnittskern.***

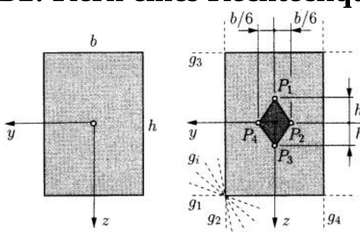
B1. Kern eines runden Querschnitts:



$$OS = \frac{1/\pi a^2}{\sqrt{\left(\frac{z_F}{\pi a^4/4}\right)^2}} \ge a \quad \Rightarrow$$

$z_F \le a/4$. Radius des Kerns ist $a/4$.

B2: Kern eines Rechteckquerschnitts



Betrachten wir zunächst als Nullinien die Seiten des Querschnitts: 1) $z_0 = h/2$, $y_0 = \infty$ Das bedeutet, daß in der Gleichung der Nulllinie $y/y_0 + z/z_0 = 1$ den Term mit y gegen Null strebt. Die Gleichung der Nullinie $\frac{z_F}{I_y} z + \frac{y_F}{I_z} y + \frac{1}{A} = 0$ reduziert sich auf

$$\frac{z_F}{I_y} z + \frac{1}{A} = 0 \text{ mit } z = z_0 = \frac{h}{2} \;\Rightarrow\; \frac{z_F}{I_y}\frac{h}{2} + \frac{1}{A} = 0$$

$$\Rightarrow\; z_F = -\frac{2I_y}{Ah} = -\frac{2bh^3}{12bh^2} = -\frac{h}{6},\; y_F = 0.$$

2) $z_0 = \infty$, $y_0 = -b/2 \;\Rightarrow\; z_F = 0$, $y_F = b/6$.

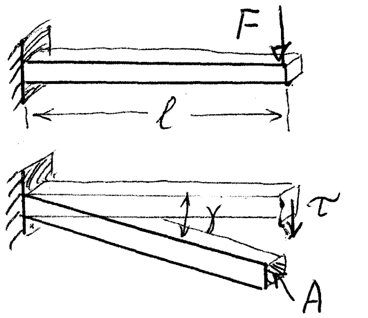
3) $z_0 = -h/2$, $y_0 = \infty \;\Rightarrow\; z_F = h/6$, $y_F = 0$.

4) $z_0 = \infty$, $y_0 = b/2 \;\Rightarrow\; z_F = 0$, $y_F = -b/6$.

Für eine beliebige Gerade, die durch eine Ecke 1 geht, ist $z_0 = h/2$, $y_0 = b/2$. Die Gleichung $\frac{z_F}{I_y} z_0 + \frac{y_F}{I_z} y_0 + \frac{1}{A} = 0$ stellt eine Gerade auf der Ebene (z_F, y_F) dar. Der Querschnittskern hat somit die Form eines Rhombus.

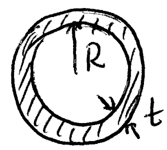
II. Einfluß des Schubes

Bei einer Belastung durch eine Querkraft ist die Durchbiegung durch zwei Deformationsarten verursacht: (a) "reine Biegung" unter Wirkung eines Momentes und (b) eine Scherung durch die Querkraft.



Zum Beispiel, bei einem Kragbalken ist die Absenkung des Angriffspunktes durch Biegung gleich $w_{Biegung} = \frac{Fl^3}{3EI}$. Die Absenkung durch Schub ist gleich $w_{Schub} = l\gamma = l\frac{F}{AG}$. Die gesamte Durchbiegung ist gleich $w = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Fl}{AG}$.

B3. Rohr



Zu bestimmen ist das Verhältnis der Schub- und Biegebeiträge in die Absenkung eines Kragbalkens mit einem dünnwandigen runden Querschnitt.

<u>*Lösung:*</u> Das gesuchte Verhältnis ist gleich $\frac{w_{Schub}}{w_{Biegung}} = \frac{Fl}{AG}\frac{3EI}{Fl^3}$. Unter Berücksichtigung der Gleichungen $A = 2\pi Rt$, $I = \pi R^3 t$ und $E = 2(1+\nu)G$ erhalten wir

$$\frac{w_{Schub}}{w_{Biegung}} = \frac{3}{2}\frac{E}{G}\frac{R^2}{l^2} = 3(1+\nu)\frac{R^2}{l^2} \approx \left(\frac{2R}{l}\right)^2.$$

Die Beiträge werden gleich, wenn der Durchmesser des Rohres gleich seiner Länge ist. Für $l = 6R$ beträgt der Schubbeitrag ca. 10%, bei $l = 20R$ nur 1%.