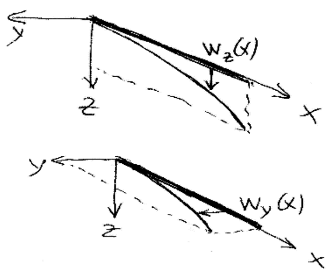
Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente. Schiefe Biegung, Spannungen im Balken.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 4.2.3, 4.7.**

I. Biegung in 3D. Ein schwach gekrümmter Balken kann durch einen zweidimensionalen Vektor $\vec{w}(x) = \left(w_y(x), w_z(x)\right)$ der Verschiebung aus dem nicht deformierten Zustand charakterisiert werden.



Die Krümmungen um die *y*- und *z*-Achsen werden wie folgt definiert:

$$\kappa_y = -\frac{d^2 w_z(x)}{dx^2} = -w_z''(x)$$
$$\kappa_z = \frac{d^2 w_y(x)}{dx^2} = w_y''(x) \qquad (1)$$

Das Biegemoment im Balken hängt mit den Krümmungen wie folgt zusammen (hier ohne Beweis): $M_y = EI_{yz}\kappa_z + EI_y\kappa_y$

$$M_z = EI_z\kappa_z + EI_{zy}\kappa_y$$

Dieses Gleichungssystem kann in der Matrixform dargestellt werden:

Oder unter Berücksichtigung von (1):

$$\begin{pmatrix} M_y \\ M_z \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} I_y & I_{yz} \\ I_{yz} & I_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -w_z''(x) \\ w_y''(x) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

II. Einfache Herleitung der Gleichungen für die Hauptträgheitsmomente. Die zwei Invarianten des Tensors der Flächenträgheitsmomente sind:

$$I_\eta + I_\zeta = I_y + I_z \qquad (3)$$

und

$$\tfrac{1}{4}\left(I_\eta - I_\zeta\right)^2 + I_{\eta\zeta}^2 = \tfrac{1}{4}\left(I_y - I_z\right)^2 + I_{yz}^2 .$$

Falls (η,ζ) die Hauptträgheitachsen sind, gilt $I_{\eta\zeta} = 0$ und die zweite der Gleichungen kann wie folgt umgeschrieben werden:

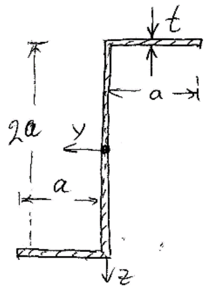
$$I_\eta - I_\zeta = \sqrt{\left(I_y - I_z\right)^2 + 4I_{yz}^2} \qquad (4)$$

Durch Summieren und Subtrahieren von (3) und (4) erhalten wir die Hauptträgheitsmomente:

$$I_{\eta,\zeta} = \frac{1}{2}\left[\left(I_y + I_z\right) \pm \sqrt{\left(I_y - I_z\right)^2 + 4I_{yz}^2}\right].$$

B1. Zu bestimmen sind die Trägheitsachsen - und -Momente des gezeigten Profils.

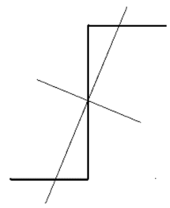
<u>Lösung:</u> Der Schwerpunkt liegt im Symmetriezentrum des Profils. Die Trägheitsmomente bezüglich der Achsen *y* und *z* sind:



$$I_y = \frac{t(2a)^3}{12} + 2taa^2 = \frac{8}{3}ta^3,$$
$$I_z = \frac{2}{3}ta^3,$$

$$I_{yz} = -\int yz dA = 2\int_{-a}^{0} aytdy = -ta^3 .$$

Die Lage der Hauptträgheitsachsen wird durch den Winkel φ^* gegeben:



$$\tan 2\varphi^* = \frac{-2ta^3}{\left(\frac{8}{3}ta^3 - \frac{2}{3}ta^3\right)} = -1$$

Daraus folgt $2\varphi^* = -45°$, $\varphi^* = -22{,}5°$.

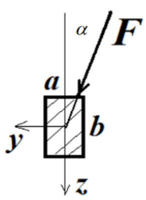
Die Hauptträgheitsmomente sind

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\left(I_y + I_z\right) \pm \sqrt{\left(I_y - I_z\right)^2 + 4I_{yz}^2}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{8}{3}ta^3 + \frac{2}{3}ta^3\right) \pm \sqrt{\left(\frac{8}{3}ta^3 - \frac{2}{3}ta^3\right)^2 + 4\left(ta^3\right)^2}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}ta^3\left[\tfrac{10}{3} \pm \sqrt{2^2 + 4}\right] = \tfrac{5}{3} \pm \sqrt{2} = \begin{Bmatrix} 3{,}08 \\ 0{,}25 \end{Bmatrix} ta^3$$

Das größere Trägheitsmoment ist hier ca. 12 Mal größer als das kleinere.

III. Schiefe Biegung

Ein links fest eingespannter Balken mit rechteckigem Querschnitt (Seiten *a* und *b*) wird am rechten Ende mit einer Kraft $\vec{F}$ unter dem Winkel α zur Vertikalen belastet. Zu bestimmen ist der Betrag und die Richtung der Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft.



<u>Lösung:</u> Kartesische Komponenten der Kraft $\vec{F} = (F_y, F_z)$ sind gleich $F_y = F\sin\alpha$, $F_z = F\cos\alpha$. Die Flächenträgheitsmomente sind gleich $I_y = ab^3/12$, $I_z = ba^3/12$. Gäbe

es nur die vertikale Kraftkomponente, würde sich der Angriffspunkt um $w_z = \dfrac{F_z l^3}{3EI_y} = \dfrac{Fl^3\cos\alpha}{3EI_y}$ verschieben. Gebe es nur die horizontale Kraftkomponente, würde sich der Angriffspunkt um $w_y = \dfrac{F_y l^3}{3EI_z} = \dfrac{Fl^3\sin\alpha}{3EI_z}$ verschieben. Bei Anwesenheit beider Kraftkomponenten ist der Verschiebungsvektor durch Superpositionsprinzip gegeben:

$$\vec{w} = \left(\frac{Fl^3\sin\alpha}{3EI_z}, \frac{Fl^3\cos\alpha}{3EI_y}\right) = \frac{4Fl^3}{Eab}\left(\frac{\sin\alpha}{a^2}, \frac{\cos\alpha}{b^2}\right)$$

Die Verschiebungslinie bildet mit der Vertikalen den Winkel θ: $\tan\theta = \frac{b^2}{a^2}\tan\alpha$.

Der Betrag der Verschiebung ist gleich

$$|\vec{w}| = \frac{4Fl^3}{Eab}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{a^4} + \frac{\cos^2\alpha}{b^4}}\ .$$

IV. Spannungsverteilung im Balken

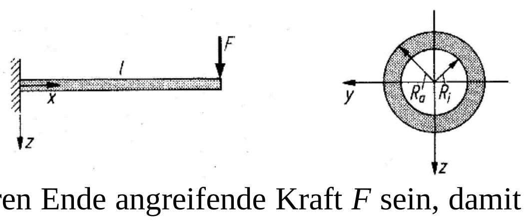
Bei der Herleitung der Balkengleichung haben wir festgestellt, dass die Zugspannungen im Balken gleich $\sigma = E\varepsilon = E\dfrac{y}{R}$ sind, wobei *y* eine Koordinate senkrecht zur Balkenachse, gezählt von der neutralen Fläche, ist. Andererseits folgt aus der Balkengleichung $M_z = -\dfrac{EI_z}{R}$. Daraus folgt $\dfrac{1}{R} = -\dfrac{M_z}{EI_z}$ und $\boxed{\sigma = -\dfrac{M_z}{I_z}y}$.

Maximale Spannungen werden erreicht in den Punkten, die am weitesten von der neutralen Fläche entfernt liegen. Wenn der maximale Abstand von der neutralen Fläche $y_{\max}$ ist, so ist die maximale Spannung gleich

$$\boxed{|\sigma_{\max}| = \left|\frac{M_z}{I_z}y_{\max}\right| = \frac{|M_z|}{W}}.$$

Die Größe $W = I_z/|y_{\max}|$ heißt das *Widerstandsmoment.*

B1. Ein Rohr ($R_a = 5\,\text{cm}$, $R_i = 4\,\text{cm}$, $l = 3\,\text{m}$) ist links eingespannt. Wir groß darf die am an-



deren Ende angreifende Kraft *F* sein, damit die zulässige Spannung den Wert $\sigma_{zul} = 150\,\text{MPa}$ nicht überschreitet?

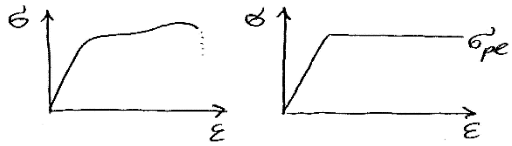
<u>*Lösung.*</u> Das maximale Biegemoment wirkt an der Einspannstelle und ist gleich $M_{\max} = lF$. Die maximale Spannung $|\sigma_{\max}| = \dfrac{|M_{\max}|}{W}$ muss die Bedingung $|\sigma_{\max}| = \dfrac{lF}{W} \le \sigma_{zul}$ erfüllen, wobei

$$W = \frac{I_z}{|y_{\max}|} = \frac{\pi\left(R_a^4 - R_i^4\right)}{4R_a} = 5{,}8\cdot10^{-5}\ \text{m}^3 \text{ gilt.}$$

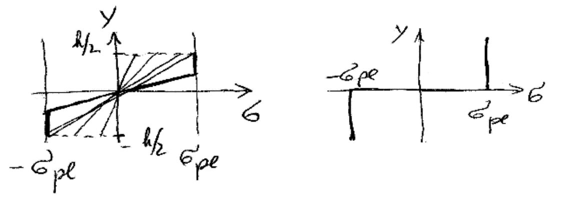
Daraus folgt

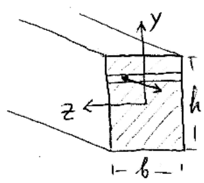
$$F \le \frac{W\sigma_{zul}}{l} = \frac{5{,}8\cdot10^{-5}\ \text{m}^3\cdot150\cdot10^6\ \text{N/m}^2}{3\text{m}}$$
$$= 2{,}9\cdot10^3\ \text{N}$$

V. Was passiert, wenn die kritische Spannung überschritten wird?



Wir betrachten ein "elastisch-ideal plastisches" Material: Die Spannung steigt linear nach dem Hookeschen Gesetz bis sie den kritischen Wert





σ_{pl} erreicht und ändert sich nicht weiter. Im elastischen Bereich ist die Spannung gleich $\sigma = Ey/R$. Sie erreicht Maximum bei $y = \pm h/2$. Im vollplastischen Zustand gilt

$$M_p = \int y\,dF = \int y\sigma\,dA = 2\int_0^{h/2} y\sigma_{pl}\,dA = 2\int_0^{h/2} y\sigma_{pl}b\,dy$$

$$M_p = 2\sigma_{pl}b\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\sigma_{pl}bh^2.$$

Im Zustand, wo die Spannung erst an einem einzigen Punkt den kritischen Wert erreicht hat.

$$M_c = \int y\sigma_{el}\,dA = 2\int_0^{h/2} y\frac{y\sigma_{pl}}{h/2}\,dA = 4\int_0^{h/2} y^2\frac{\sigma_{pl}}{h}b\,dy$$

$M_c = \sigma_{pl}bh^2/6$. Wir sehen, dass $M_p = 1{,}5M_c$