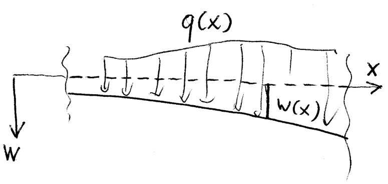
Balkenbiegung: Biegelinie

Literatur: *Hauger, Schnell und Groß.* Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 4.5.2

I. Balkendifferentialgleichung 4. Ordnung



Verlauf der neutralen Faser eines gebogenen Balkens ("Biegelinie") berechnet sich entweder aus der Gleichung

$$EI_z w''(x) = -M_z(x) \ , \qquad (1)$$

wenn das Biegemoment als Funktion der Koordinate im Voraus bestimmt werden kann (d.h. für statisch bestimmte Systeme), oder aus der *Balkendifferentialgleichung 4. Ordnung*

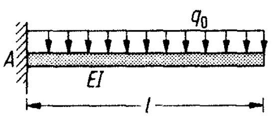
$$\boxed{\left(EI_z w''(x)\right)'' = q(x) \, . \qquad (2)}$$

Diese Gleichung kann auch an statisch unbestimmte Systeme angewandt werden. Die vier Integrationkonstanten müssen aus vier Randbedingungen bestimmt werden.

II. Beispiele

Wir untersuchen drei gleiche Balken konstanter Biegesteifigkeit *EI* unter konstanter Streckenlast q_0 bei unterschiedlicher Lagerung.

B1. Dieser Kragbalken ist statisch bestimmt.



Man könnte zunächst den Momentenverlauf berechnen und dann Gleichung (1) anwenden. In den meisten Fällen ist es aber einfacher, die Gleichung (2) zu benutzen:

$$EIw^{IV} = q_0 \, .$$

Ihre vierfache Integration ergibt:

$$EIw''' = -Q = q_0 x + C_1 \, ,$$

$$EIw'' = -M = \tfrac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2 \, ,$$

$$EIw' = \tfrac{1}{6} q_0 x^3 + \tfrac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \, ,$$

$$EIw = \tfrac{1}{24} q_0 x^4 + \tfrac{1}{6} C_1 x^3 + \tfrac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \, .$$

Die Randbedingungen lauten:

$$w(0) = 0, \ w'(0) = 0,$$

$$M(l) = -EIw''(l) = 0, \ Q(l) = -EIw'''(l) = 0.$$

Aus den ersten beiden folgt $C_3 = 0$, $C_4 = 0$.

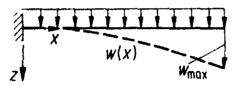
Die letzten zwei Randbedingungen lauten

$$q_0 l + C_1 = 0 \, ,$$

$$\tfrac{1}{2} q_0 l^2 + C_1 l + C_2 = 0 \, .$$

Daraus folgt $C_1 = -q_0 l$, $C_2 = \tfrac{1}{2} q_0 l^2$ und damit

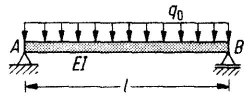
$$w(x) = \frac{q_0 x^2}{EI} \left(\tfrac{1}{24} x^2 - \tfrac{1}{6} lx + \tfrac{1}{4} l^2 \right) .$$



Die maximale Absenkung wird im Endpunkt erreicht und ist gleich

$$w(l) = \frac{q_0 l^2}{EI} \left(\tfrac{1}{24} l^2 - \tfrac{1}{6} l^2 + \tfrac{1}{4} l^2 \right) = \tfrac{1}{8} \frac{q_0 l^4}{EI} \, .$$

B2. Auch dieser Balken ist statisch bestimmt gelagert. Dennoch ist es auch in diesem Fall einfacher, die Gleichung (2) zu benutzen. Da



die Streckenlast dieselbe ist, wie im Beispiel 1, ist auch die allgemeine Lösung dieselbe. Der einzige Unterschied liegt in den Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \, , \ w(l) = 0 \, , \ M(0) = 0 \, , \ M(l) = 0 \ .$$

$$EIw(0) = C_4 = 0 \, , \qquad EIw''(0) = C_2 = 0 \, ,$$

$$EIw(l) = \tfrac{1}{24} q_0 l^4 + \tfrac{1}{6} C_1 l^3 + C_3 l = 0 \, ,$$

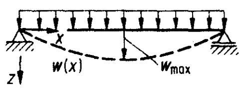
$$EIw''(l) = \tfrac{1}{2} q_0 l^2 + C_1 l = 0 \, ,$$

$$C_1 = -\tfrac{1}{2} q_0 l \ , \ C_3 = \tfrac{1}{24} q_0 l^3 \, .$$

Die Biegelinie ist

$$w(x) = \tfrac{1}{EI} \left(\tfrac{1}{24} q_0 x^4 - \tfrac{1}{12} q_0 l x^3 + \tfrac{1}{24} q_0 l^3 x \right)$$

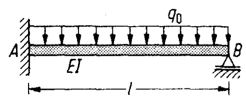
$$= \tfrac{q_0}{24EI} \left(x^4 - 2lx^3 + l^3 x \right)$$



Die maximale Durchbiegung wird in der Mitte $x = l/2$ erreicht und ist gleich

$$w(l/2) = \tfrac{q_0}{24EI} \left(\tfrac{1}{16} l^4 - \tfrac{1}{4} l^4 + \tfrac{1}{2} l^4 \right) = \tfrac{5}{384} \frac{q_0 l^4}{EI} \, .$$

B3. Der unten abgebildete Balken ist statisch unbestimmt gelagert. Schnittlasten (unter anderem das Biegemoment) können daher nicht allein aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden. Die Benutzung von Glei-



chung (2) ist in diesem Fall der einzig mögliche Weg zur Berechnung der Durchbiegung. Wir nehmen an, dass der Balken in Abwesenheit der Streckenlast spannungsfrei gelagert war.

Die Streckenlast und damit die allgemeine Lösung sind dieselbe wie in den vorigen beiden Beispielen. Die Randbedingungen lauten aber in diesem Fall wie folgt:

$$w(0) = 0 \, , \ w'(0) = 0 \, , \ w(l) = 0 \, , \ M(l) = 0 \, .$$

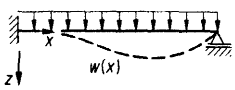
$$EIw(0) = C_4 = 0 \, , \quad EIw'(0) = C_3 = 0 \, ,$$

$$EIw(l) = \tfrac{l^2}{2} \left(\tfrac{1}{12} q_0 l^2 + \tfrac{1}{3} C_1 l + C_2 \right) = 0 \, ,$$

$$EIw''(l) = \tfrac{1}{2} q_0 l^2 + C_1 l + C_2 = 0 \, .$$

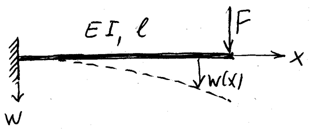
Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$C_1 = -\frac{5}{8} q_0 l$, $C_2 = \frac{1}{8} q_0 l^2$.
Für die Biegelinie ergibt sich somit
$w(x) = \frac{q_0}{EI}\left(\frac{1}{24}x^4 - \frac{5}{48}lx^3 + \frac{1}{16}l^2x^2\right)$.



Zusammen mit der Biegelinie haben wir auch die Verläufe von $w'(x)$, dem Biegemoment $M(x) = -\frac{1}{8} q_0 \left(4x^2 - 5lx + l^2\right)$ und der Querkraft $Q(x) = -\frac{1}{8} q_0 \left(8x - 5l\right)$ bestimmt. Daraus lassen sich die Lagerreaktionen ablesen:
$A = Q(0) = \frac{5}{8} q_0 l$, $B = -Q(l) = \frac{3}{8} q_0 l$,
$M^{(A)} = M(0) = -\frac{1}{8} q_0 l^2$.

B4. Wir lösen jetzt noch einmal die Aufgabe, die wir schon einmal durch Integration der Balkengleichung zweiter Ordnung gelöst haben.



Gegeben sei ein links fest eingespannter Balken. An seinem rechten Ende greift eine Kraft F an.
Zu bestimmen ist die Biegelinie und den Neigungswinkel im Angriffspunkt der Kraft.

Lösung: Auch in diesem Fall ist die oben erhaltene allgemeine Lösung korrekt, nur ist
$q_0 = 0$: $EIw^{IV} = 0$,
$EIw''' = -Q = C_1$,
$EIw'' = -M = C_1 x + C_2$,
$EIw' = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$,
$EIw = \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.

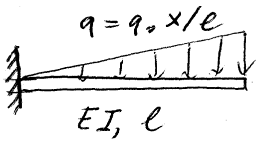
Die Randbedingungen sind fast wie im ersten Beispiel:
$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $M(l) = -EIw''(l) = 0$.

Für die Querkraft am rechten Rand gilt aber
$Q(l) = -EIw'''(l) = F$.
$EIw(0) = C_4 = 0$, $EIw'(0) = C_3 = 0$,
$EIw''(l) = C_1 l + C_2 = 0$,
$EIw'''(l) = -Q = C_1 = -F$.
Daraus folgt $C_2 = Fl$. Für die Biegelinie ergibt sich $w(x) = \frac{F}{EI}\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}lx^2\right)$ und für den Neigungswinkel (eigentlich Tangens des Neigungswinkels) $w'(x) = \frac{F}{EI}\left(-\frac{1}{2}x^2 + lx\right)$. Die Absenkung des Angriffspunktes der Kraft ist gleich $w(l) = \frac{Fl^3}{3EI}$. Für den Neigungswinkel des rechten Endes ergibt sich $\theta(l) \approx w'(l) = \frac{1}{2}\frac{F}{EI}l^2$.

B5. Biegelinie unter Einwirkung eines Momentes:

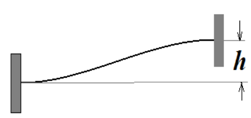
Die allgemeine Lösung lautet wie folgt:
$EIw''' = -Q = C_1$,
$EIw'' = -M = C_1 x + C_2$,
$EIw' = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$,
$EIw = \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.
Die Randbedingungen sind:
$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $M(l) = -EIw''(l) = M_0$,
$Q(l) = -EIw'''(l) = 0$. Daraus folgt:
$EIw(0) = C_4 = 0$, $EIw'(0) = C_3 = 0$,
$EIw''(l) = C_1 l + C_2 = -M_0$,
$EIw'''(l) = -Q = C_1 = 0$. Die Biegelinie ist eine Parabel: $w(x) = -\frac{1}{2}\frac{M_0}{EI}x^2$.

B6. Auf einen links fest eingespannten Balken wirkt eine linear steigende Streckenlast. Zu bestimmen ist die Biegelinie.



Lösung: Die Balkendifferentialgleichung vierter Ordnung lautet
$EIw^{IV} = q_0 x / l$.
Ihre vierfache Integration ergibt:
$EIw''' = -Q = \frac{1}{2} q_0 x^2 / l + C_1$,
$EIw'' = -M = \frac{1}{6} q_0 x^3 / l + C_1 x + C_2$,
$EIw' = \frac{1}{24} q_0 x^4 / l + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$,
$EIw = \frac{1}{120} q_0 x^5 / l + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.
Die Randbedingungen lauten:
$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$,
$M(l) = -EIw''(l) = 0$, $Q(l) = -EIw'''(0) = 0$.
Aus den ersten beiden folgt $C_3 = 0$ und $C_4 = 0$.
Die letzten zwei Randbedingungen lauten
$EIw'''(l) = \frac{1}{2} q_0 l + C_1 = 0$,
$EIw''(l) = \frac{1}{6} q_0 l^2 + C_1 l + C_2 = 0$.
Daraus folgt $C_1 = -\frac{1}{2} q_0 l$ und $C_2 = \frac{1}{3} q_0 l^2$.
$w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{120} q_0 x^5 / l - \frac{1}{12} q_0 l x^3 + \frac{1}{6} q_0 l^2 x^2\right)$.

B7.



Die allgemeine Lösung:
$w' = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$
$w = \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.
Randbedingungen:
$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $w(l) = -h$, $w'(l) = 0$.
$w(x) = h\left(2\left(x/l\right)^3 - 3\left(x/l\right)^2\right)$.