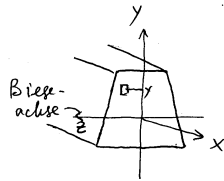


Flächenträgheitsmomente.

Literatur: Hauger, Schnell und Groß. Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 4.2.1., 4.2.2

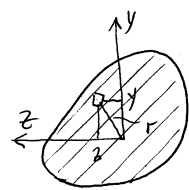
I. Definitionen

Wir haben das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse als Integral



$$I_z = \int y^2 dA \text{ definiert.}$$

Das Produkt EI_z heißt *Biegesteifigkeit* und bestimmt vollständig elastische Eigenschaften eines Balkens in Bezug auf Biegung um die z-Achse.

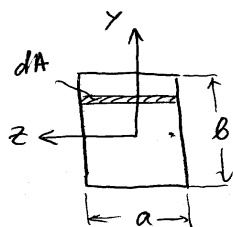


Es ist bequem zunächst *nicht* anzunehmen, daß das Koordinatensystem sein Ursprung im Schwerpunkt des Querschnitts hat. Wir wählen ein beliebiges Koordinatensystem und definieren die folgenden vier Größen:

$$\left. \begin{aligned} I_z &= \int y^2 dA \\ I_y &= \int z^2 dA \\ I_{yz} &= I_{zy} = -\int yz dA \quad (\text{Deviationsmoment}) \\ I_p &= \int (y^2 + z^2) dA = \int r^2 dA \quad (\text{polares Flächenträgheitsmoment}) \end{aligned} \right\} \text{ axiale Trägheitsmomente}$$

II. Berechnung der Trägheitsmomente

B1. Rechteck mit den Seiten a und b:

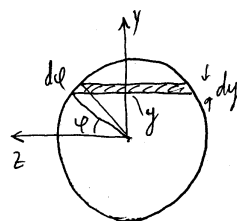


Bei der Biegung um die z-Achse schneiden wir die Platte in dünne Streifen senkrecht zur y-Achse.

$$I_z = \int y^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 a dy = a \frac{y^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} = 2a \frac{b^3}{3 \cdot 8}$$

$$I_z = \frac{ab^3}{12}, \quad I_y = \frac{ba^3}{12} \Rightarrow \frac{I_y}{I_z} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

B2. Kreisquerschnitt:



$$I_z = \int y^2 dA = 2 \int_0^R y^2 2\sqrt{R^2 - y^2} dy$$

$$= \left| \begin{aligned} y &= R \sin \varphi \\ dy &= R \cos \varphi d\varphi \end{aligned} \right| =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} R^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi$$

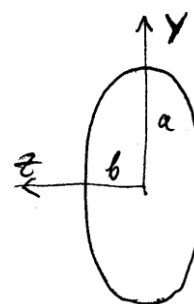
$$= 4 \int_0^{\pi/2} R^4 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} R^4 (1 - \cos^2 2\varphi) d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} R^4 \left(1 - \frac{1}{2}(1 + \cos 4\varphi)\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} R^4 d\varphi - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} R^4 \cos 4\varphi d\varphi = \frac{\pi R^4}{4}$$

B3. Elliptischer Querschnitt:



Eine Ellipse mit den Halbachsen a und b wird durch die Gleichung $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ beschrieben. Daraus folgt

$$z = b\sqrt{1 - (y/a)^2}$$

Für das Flächenträgheitsmoment ergibt sich:

$$I_z = \int y^2 dA = 2 \int_0^a y^2 2b\sqrt{1 - (y/a)^2} dy = \frac{\pi}{4} ba^3$$

Analog dazu: $I_y = \frac{\pi}{4} ab^3$.

III. Tricks

Aus den Definitionen folgt:

$$I_p = I_y + I_z$$

B4. Polares Flächenträgheitsmoment eines Kreises:

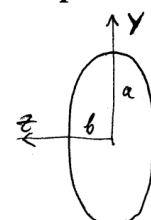
$$I_p = \int r^2 dA = \int_0^R r^2 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \pi \frac{R^4}{2}$$

Andererseits wissen wir, dass

$$I_p = I_y + I_z = 2I_y$$

Daraus folgt: $I_y = I_z = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$.

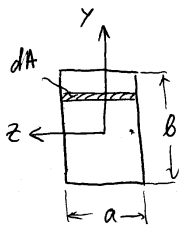
B5. Polares Flächenträgheitsmoment einer Ellipse:



$$I_p = I_y + I_z = \frac{\pi}{4} (ba^3 + ab^3)$$

$$= \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2)$$

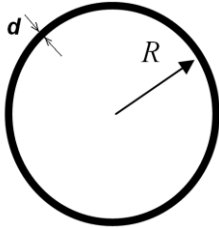
B6. Polares Flächenträgheitsmoment eines Rechtecks:



$$I_p = I_y + I_z = \frac{1}{12}(ba^3 + ab^3)$$

$$= \frac{ab}{12}(a^2 + b^2)$$

B7. Ein dünnwandiges Rohr:



$$I_p = \int r^2 dA = R^2 A$$

$$= R^2 2\pi R d = 2\pi R^3 d$$

$$I_y = I_z = \frac{I_p}{2} = \pi R^3 d$$

IV. Parallelverschiebung der Bezugsachsen: Der Satz von Steiner

Betrachten wir die Trägheitsmomente $I^{(S)}$ eines Querschnitts bezüglich einer Achse, die durch den Schwerpunkt S geht und Trägheitsmoment I desselben Querschnitts bezüglich einer Achse parallel dazu. Die Koordinaten des Schwerpunkts im neuen Koordinatensystem seien \tilde{y}_S und \tilde{z}_S . Zwischen den Koordinaten desselben Punktes in zwei Koordinatensystemen besteht folgender Zusammenhang:

$\tilde{y} = y + \tilde{y}_S, \quad \tilde{z} = z + \tilde{z}_S$.

Für die Trägheitsmomente bezüglich des neuen Koordinatensystems gilt daher:

$$I_{\tilde{y}} = \int \tilde{z}^2 dA = \int (z + \tilde{z}_S)^2 dA$$

$$= \int (z^2 + 2z\tilde{z}_S + \tilde{z}_S^2) dA$$

$$= \int z^2 dA + \int 2z\tilde{z}_S dA + \int \tilde{z}_S^2 dA$$

$$= I_y^{(S)} + \tilde{z}_S \int 2z dA + \tilde{z}_S^2 \int dA$$

$$I_{\tilde{y}} = I_y^{(S)} + \tilde{z}_S^2 A$$

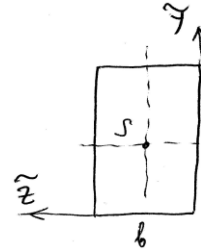
$$I_{\tilde{y}} = I_y^{(S)} + \tilde{z}_S^2 A$$

$$I_{\tilde{z}} = I_z^{(S)} + \tilde{y}_S^2 A$$

$$I_{\tilde{y}\tilde{z}} = I_{yz}^{(S)} - \tilde{y}_S \tilde{z}_S A$$

Steinerscher Satz

B8. Steinerscher Satz für ein Rechteck



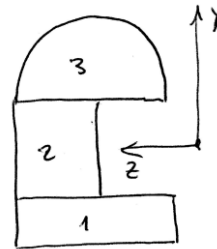
$$I_{\tilde{z}} = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{\tilde{y}} = \frac{hb^3}{3}$$

$$I_{\tilde{y}\tilde{z}} = 0 - \frac{b}{2} \frac{h}{2} bh = -\frac{b^2 h^2}{4}$$

V. Summierung der Trägheitsmomente

Ist ein Profil eine zusammengesetzte Figur, so werden die Trägheitsmomente einzelner Teile summiert:



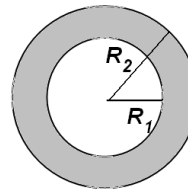
$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} + \dots = \sum_{i=1}^N I_z^{(i)}$$

Ähnliches gilt für

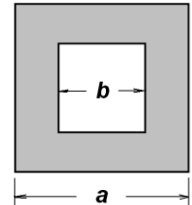
$$I_y = \sum_{i=1}^N I_y^{(i)}, \quad I_{yz} = \sum_{i=1}^N I_{yz}^{(i)}$$

Die zu addierenden Flächenträgheitsmomente können auch negativ sein.

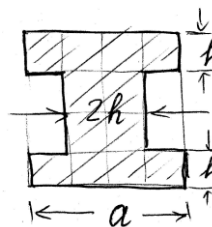
B9. Beispiele für zusammengesetzte Körper



$$I_z = \frac{\pi}{4}(R_2^4 - R_1^4)$$



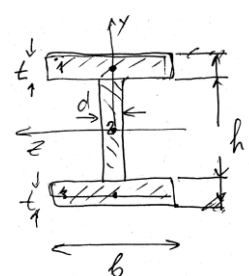
$$I_z = \frac{1}{12}(a^4 - b^4)$$



$$I_z = \frac{1}{12}(a^4 - (a-2h)^4)$$

Für dünnwandige Profile

$$I_z = \frac{2}{3} a^3 h$$



$$I_z \approx \frac{dh^3}{12} + \frac{h^2 bt}{2}$$