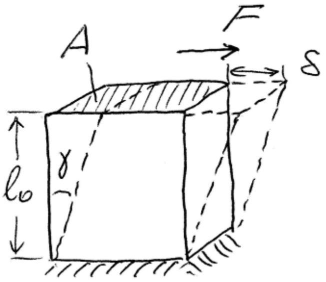
Schubspannung, Scherdeformation. Der Torsionsstab.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 5.1.**

I. Reine Scherung (oder Scherdeformation)



Scherdeformation $\equiv \dfrac{\delta}{l_0} = \tan\gamma \approx \gamma + \dfrac{\gamma^3}{3} .. \approx \gamma$

γ heißt *Schub-* oder *Gleitwinkel.*

Schubspannung $\tau = \dfrac{F}{A}$.

Das Hookesche Gesetz für die Scherung: $\tau = G\gamma$

G heißt *Schubmodul*. Er hängt mit dem Elastizitätsmodul und der Poissonzahl wie folgt zusammen:

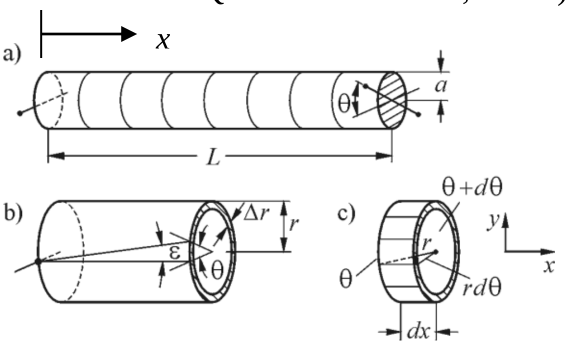
$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}.$$

Für Metalle $\nu \sim 1/3$, somit $G \approx \frac{3}{8}E$.

Beispiele: Stahl: $E = 210\,\text{GPa} \Rightarrow G \approx 78\,\text{GPa}$.
Gummi: $\nu \approx 1/2 \Rightarrow G \approx E/3$.

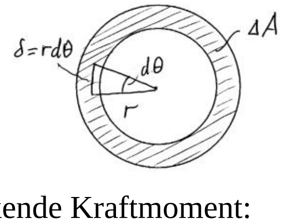
II. Torsion

Gegeben sei ein elastischer Stab mit rundem Querschnitt (Bild a). Jeder Querschnitt wird durch den Winkel $\theta(x)$ charakterisiert, um welchen er sich bezüglich des "unverdrehten" Anfangszustandes gedreht hat. Wir wollen das mit dieser Verdrehung zusammenhängende Torsionsmoment bestimmen. Als Hilfsaufgabe betrachten wir einen dünnen zylindrischen Ausschnitt aus dem Stab (dünnwandiger Zylinder mir dem Querschnittsradius *r*, Bild b).



Aus diesem schneiden wir (gedanklich) ein infinitesimal kleines Element (Ring) zwischen *x* und *x* + d*x* (Bild c). Der linke Rand ist gedreht um den Winkel $\theta(x)$, der rechte um $\theta(x+\mathrm{d}x) = \theta(x) + \mathrm{d}\theta$. Den Ring teilen wir weiterhin in kleine (ursprünglich rechteckige) Elemente. Durch Verdrehung erleidet jedes kleine Element *reine Scherung. Die Scherdeformation* ist gleich

$$\gamma = \frac{\Delta y}{l_0} = \frac{r\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = r\theta',$$



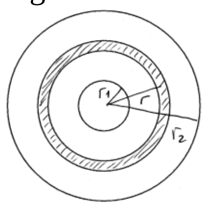
die Scherspannung:

$$\tau = G\gamma = Gr\theta'$$

Das im Querschnitt wirkende Kraftmoment:

$$M_{Ring} = \underbrace{\tau \cdot A \cdot}_{\text{Kraft}} \underbrace{r}_{\text{Hebelarm}} = Gr\theta' A \cdot r = GAr^2\theta'$$

Summiert über alle Ringe im Querschnitt ergibt sich das folgende Torsionsmoment:

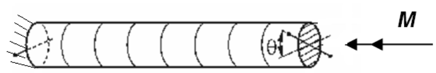


$$M_T = \sum \Delta M = \sum \tau r \Delta A = \int_{r_1}^{r_2} \tau(r)\, r\, \mathrm{d}A = \int_{r_1}^{r_2} G\theta'(x) r^2\, \mathrm{d}A = G\theta'(x)\int_{r_1}^{r_2} r^2\, \mathrm{d}A$$

$$M_T = G\theta'(x) I_p,$$

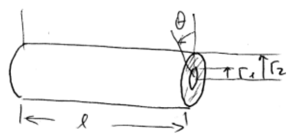
$I_p = \int_{r_1}^{r_2} r^2\,\mathrm{d}A$ - ist das *polare Flächenträgheitsmoment* des Querschnitts

III. Torsionssteifigkeit



Wird ein Stab durch ein Torsionsmoment M_T um den Winkel θ verdreht, so gilt $\boxed{M_T = k\theta}$. *k* ist *Torsionssteifigkeit.*

IV. Homogene Torsion eines homogenen Stabes.



In diesem Fall gilt $\theta' = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta x} = \dfrac{\theta}{l}$.

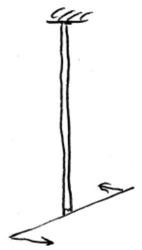
Für das Torsionsmoment: $M = G\theta'(x) I_p = G\dfrac{\theta}{l} I_p = k\theta$.

Die Torsionssteifigkeit ist: $\boxed{k = \dfrac{GI_p}{l}}$.

Für einen runden Querschnitt gilt

$$I_p = \int_{r_1}^{r_2} r^2\,\mathrm{d}A = \int_{r_1}^{r_2} r^2 2\pi r\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_{r_1}^{r_2} r^3\mathrm{d}r = 2\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_{r_1}^{r_2} = \frac{\pi}{2}\left(r_2^4 - r_1^4\right).$$

Für einen Vollzylinder mit dem Radius R gilt $\boxed{I_p = \frac{\pi}{2} R^4}$. Die Torsionssteifigkeit ist gleich $\boxed{k = \frac{\pi G}{2l} R^4}$.



Torsion kann man zur Messung des Schubmoduls benutzen (historisches Beispiel: Torsionswaage von Coulomb).

V. Spannungen bei Torsion

Aus der Gleichung $\tau = G\gamma = Gr\theta'$ folgt, daß die Deformationen im Querschnitt nicht gleichmäßig verteilt sind: An der Achse sind sie Null und erreichen an der äußeren Fläche den maximalen Wert

$$\tau_{\max} = GR\theta' = GR\frac{\theta}{l}.$$

Andererseits ist $M_T = G\frac{\theta}{l} I_p \Rightarrow \frac{\theta}{l} = \frac{M_T}{GI_p} \Rightarrow$

$$\boxed{\tau_{\max} = R\frac{M_T}{I_p}}$$

Für einen Vollzylinder:

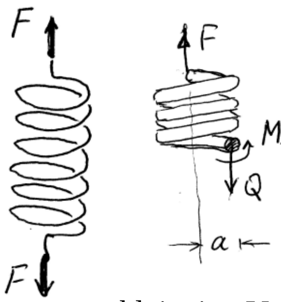
$$\boxed{\tau_{\max} = R\frac{M_T}{I_p} = R\frac{M_T}{\frac{\pi}{2}R^4} = \frac{2}{\pi}\frac{M_T}{R^3}}$$

Aufgabe: Eine stählerne Welle überträgt ein Kraftmoment $M_T = 10^4$ Nm. Zu bestimmen ist der zulässige Durchmesser der Welle, wenn die Spannungen den Wert $\tau_{\max} = 60\,\text{MPa}$ nicht überschreiten dürfen.

Lösung:

$$R_{\min} = \left(\frac{2}{\pi}\frac{M_T}{\tau_{\max}}\right)^{1/3} = \left(\frac{2}{\pi}\frac{10^4\,\text{N m}}{60\cdot 10^6\,\text{Pa}}\right)^{1/3} \approx 47\,\text{mm}$$

VI. Steifigkeit einer Schraubenfeder

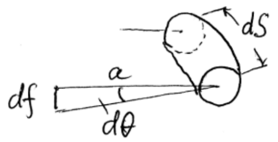


Zu bestimmen ist die Federkonstante einer Schraubenfeder. Die Feder sei eng gewickelt (Steigungswinkel klein). Der Durchmesser des Federdrahtes sei klein im Vergleich zum Radius der Wicklung.

Aus einem Schnitt an einer beliebigen Stelle erhalten wir

$$Q = F, \quad M_T = aF.$$

Betrachten wir einen unendlich kleinen Ausschnitt ds der Feder.



Durch seine Verdrehung um den Winkel dθ entsteht eine Absenkung des Zentrums eines Federringes um $\mathrm{d}f = a\mathrm{d}\theta$. Der Torsionswinkel ergibt sich aus $M_T = G\frac{\theta}{l} I_p$, wobei wir d$\theta$ statt θ und ds statt l einsetzen:

$$M_T = G\frac{d\theta}{ds} I_p.$$

Für den Torsionswinkel ergibt sich

$\mathrm{d}\theta = \frac{M_T}{GI_p}\mathrm{d}s$ und für die Absenkung

$$\mathrm{d}f = a\mathrm{d}\theta = a\frac{M_T}{GI_p}\mathrm{d}s.$$

Durch Integration über die Drahtlänge erhalten wir für die gesamte Absenkung (Verschiebung des unteren Federringes)

$$f = \int a\frac{M_T}{GI_p}\mathrm{d}s = a\frac{M_T}{GI_p}L = a\frac{aF}{GI_p}L,$$

wobei L die Gesamtlänge des Federdrahtes ist ($L \approx 2\pi an$):

$$f = a\frac{aF}{GI_p}2\pi an = \frac{a^3F}{GI_p}2\pi n$$

(n ist die Zahl der Windungen).

Für die Federsteifigkeit ergibt sich

$$c = \frac{F}{f} = \frac{GI_p}{2\pi na^3} = \frac{G\frac{\pi}{2}R^4}{2\pi na^3} = \frac{GR^4}{4na^3} = \frac{Gd^4}{64na^3}.$$

Aufgabe: Zu bestimmen ist die maximale Spannung in einer Schraubenfeder (gegeben: G, n, a, d, F).

Lösung: $\tau_{\max} = R\frac{M_T}{I_p} = \frac{2}{\pi}\frac{M_T}{R^3} = \frac{16}{\pi}\frac{aF}{d^3}$.

Eine Feder aus einem Federstahl mit $\tau_{\max} = 200\,\text{MPa}$ habe folgende geometrische Parameter: $a = 1\,\text{cm}, d = 1\,\text{mm}, \quad n = 10$. Wie groß ist die maximale zulässige Kraft?

Lösung:

$$F = \frac{\pi\tau_{\max}d^3}{16a} = \frac{3{,}14\cdot 200\cdot 10^6\,\text{Pa}\cdot\left(10^{-3}\right)^3\,\text{m}^3}{16\cdot 1\cdot 10^{-2}\,\text{m}} \approx 3{,}9\,\text{N}$$

(Das entspricht einem Gewicht mit der Masse $m \approx 0{,}4\,\text{kg}$).