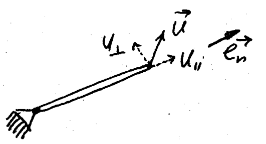
Statisch bestimmte und statisch unbestimmte elastische Stabsysteme

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 1.5,1.6.**

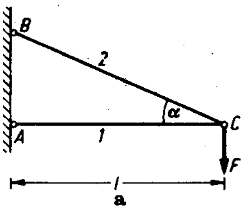
I. Hilfsaufgabe Ein elastischer Stab sei an einem Ende in einem Festlager befestigt. Das andere Ende wird aus der Anfangslage um den Vektor $\vec{u}$ verschoben. Wie ändert sich die Länge des Stabes?



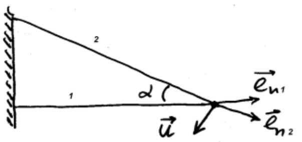
Lösung: Wenn die Verschiebung klein ist, so verursacht nur die Komponente der Verschiebung in der Stabrichtung eine Längenänderung: $\Delta l = u_{\parallel}$. Wenn wir einen Einheitsvektor $\vec{e}_n$ in der Stabrichtung einführen, kann man auch schreiben $\boxed{\Delta l = \vec{u} \cdot \vec{e}_n}$

II. Statisch bestimmtes Stabwerk 1

Zwei Stäbe mit der gleichen Dehnsteifigkeit *EA* sind gelenkig gelagert und mit einander verbunden, wie im Bild gezeigt. Gesucht ist die Verschiebung des Knotens *C*.



Bezeichnen wir die Verschiebung des Knotens mit $\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y$ und bestimmen die Einheitsvektoren in der Richtung des ersten und des zweiten Stabes:



$\vec{e}_{n1} = \vec{e}_x$, $\vec{e}_{n2} = \cos\alpha\, \vec{e}_x - \sin\alpha\, \vec{e}_y$.

Die Längenänderungen der Stäbe sind dann

$$\Delta l_1 = \vec{u} \cdot \vec{e}_{n1} = \left(u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_x = u_x ,$$

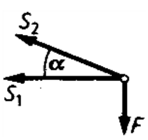
$$\Delta l_2 = \vec{u} \cdot \vec{e}_{n2} = \left(u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y \right) \cdot \left(\cos\alpha\, \vec{e}_x - \sin\alpha\, \vec{e}_y \right)$$

$$= u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha$$

Die Stabkräfte sind somit

$$S_1 = \frac{EA}{l_1} \Delta l_1 = \frac{EA}{l_1} u_x , \qquad (1)$$

$$S_2 = \frac{EA}{l_2} \Delta l_2 = \frac{EA}{l_2} \left(u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha \right). \qquad (2)$$



Die Gleichgewichtsbedingungen lassen sich in der Form schreiben:

x: $-S_2 \cos\alpha - S_1 = 0$,

y: $S_2 \sin\alpha - F = 0$.

Einsetzen von (1) und (2) und Berücksichtigung, dass $l_2 = l_1 / \cos\alpha$, führt zum Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} -\frac{EA}{l_1} \cos\alpha \left(u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha \right) \cos\alpha - \frac{EA}{l_1} u_x &= 0 \\ \frac{EA}{l_1} \cos\alpha \left(u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha \right) \sin\alpha - F &= 0 \end{aligned}\right\}$$

oder

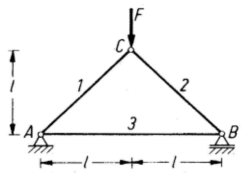
$$\left.\begin{aligned} u_x \left(1 + \cos^3\alpha \right) - u_y \sin\alpha \cos^2\alpha &= 0 \\ u_x \sin\alpha \cos^2\alpha - u_y \sin^2\alpha \cos\alpha &= \frac{F l_1}{EA} \end{aligned}\right\}$$

Daraus folgt

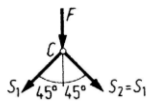
$$\boxed{\begin{aligned} u_x &= -\frac{F l_1}{EA} \frac{1}{\tan\alpha} \\ u_y &= -\frac{F l_1}{EA} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1 + \cos^3\alpha}{\sin\alpha \cos^2\alpha} = -\frac{F l_1}{EA} \frac{1 + \cos^3\alpha}{\sin^2\alpha \cos\alpha} \end{aligned}}$$

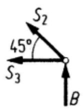
III. Statisch bestimmtes Stabwerk 2

Ein Fachwerk, das aus drei Stahlstäben besteht, wird durch die Kraft $F = 20\,\text{kN}$ belastet. Wie groß müssen die Querschnittsflächen mindestens sein, wenn die Spannungen nicht größer als $\sigma_{zul} = 150\,\text{MPa}$ und die Verschiebung des Lagers B kleiner als $0{,}05\%$ der Länge des Stabes 3 sein sollen?



Lösung: Da das Stabwerk statisch bestimmt ist, kann man die Stabkräfte direkt aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmen:





$$S_1 = S_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F, \; S_3 = \frac{F}{2}.$$

Damit die zulässige Spannung nicht überschritten wird, muss gelten:

$$\left|\sigma_1\right| = \frac{\left|S_1\right|}{A_1} \le \sigma_{zul}, \; \left|\sigma_2\right| = \frac{\left|S_2\right|}{A_2} \le \sigma_{zul}, \; \left|\sigma_3\right| = \frac{\left|S_3\right|}{A_3} \le \sigma_{zul}$$

Daraus folgt für die mindestens erforderlichen Querschnittsflächen

$$A_1 = A_2 = \frac{\left|S_1\right|}{\sigma_{zul}} = \frac{0{,}707 \cdot 20 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6}\,\text{m}^2 \approx 94{,}3\,\text{mm}^2$$

$$A_3 = \frac{\left|S_3\right|}{\sigma_{zul}} = \frac{0{,}5 \cdot 20 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6}\,\text{m}^2 \approx 66{,}7\,\text{mm}^2.$$

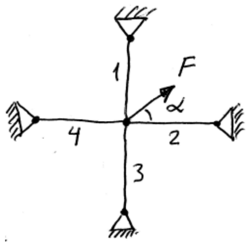
Damit die Verschiebung von Punkt B kleiner als $0{,}05\%$ der Länge des Stabes 3 ist, muss außerdem für den Stab 3 die Forderung

$\dfrac{|\Delta l_3|}{l_3} = \dfrac{|S_3|}{EA_3} \le 0{,}05\% = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ und damit

$$A_3 \ge \frac{0{,}5 \cdot 20 \cdot 10^3}{2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}}\,\mathrm{m}^2 \approx 95\,\mathrm{mm}^2$$

erfüllt sein

IV. Statisch unbestimmtes Stabwerk 1



Gegeben sind die Steifigkeiten c der Stäbe. Zu berechnen ist die Verschiebung des Knotens.

Lösung: Wir führen den Verschiebungsvektor und die Einheitsvektoren ein:

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y\,,$$

$$\vec{e}_1 = -\vec{e}_y\,, \qquad \vec{e}_2 = -\vec{e}_x\,,$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_y\,, \qquad \vec{e}_4 = \vec{e}_x\,.$$

Die Längenänderungen und die Stabkräfte sind damit durch

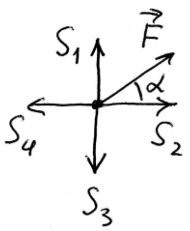
$$\Delta l_1 = \vec{u} \cdot \vec{e}_1 = -u_y\,, \quad S_1 = c\Delta l_1 = -cu_y$$

$$\Delta l_2 = \vec{u} \cdot \vec{e}_2 = -u_x\,, \quad S_2 = c\Delta l_2 = -cu_x$$

$$\Delta l_3 = \vec{u} \cdot \vec{e}_3 = u_y\,, \quad S_3 = c\Delta l_3 = cu_y$$

$$\Delta l_4 = \vec{u} \cdot \vec{e}_4 = u_x\,, \quad S_4 = c\Delta l_4 = cu_x$$

gegeben. Das Kräftegleichgewicht erfordert



$$x: \quad S_2 - S_4 + F\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow -cu_x - cu_x + F\cos\alpha = 0$$

$$y: \quad S_1 - S_3 + F\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow -cu_y - cu_y + F\sin\alpha = 0$$

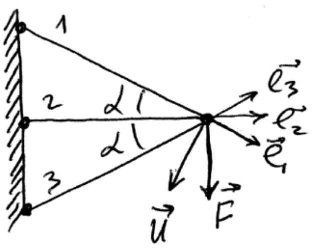
Der Verschiebungsvektor $\vec{u}$ ist damit:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{F}{2c}\cos\alpha = \frac{F_x}{2c} \\ u_y &= \frac{F}{2c}\sin\alpha = \frac{F_y}{2c} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\vec{u} = \frac{\vec{F}}{2c}}$$

V. Statisch unbestimmtes Stabwerk 2

Gegeben: *l*, *EA*, *F*.

Gesucht: Stabkräfte, Verschiebungen



Lösung:

$$\vec{e}_1 = \cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_3 = \cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y$$

Die Längenänderungen sind analog zu den vorherigen Beispielen

$$\Delta l_1 = \vec{u} \cdot \vec{e}_1 = u_x\cos\alpha - u_y\sin\alpha,$$

$$\Delta l_2 = \vec{u} \cdot \vec{e}_2 = u_x,$$

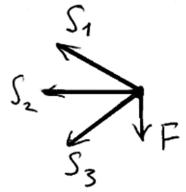
$$\Delta l_3 = \vec{u} \cdot \vec{e}_3 = u_x\cos\alpha + u_y\sin\alpha.$$

Für die Stabkräfte ergibt sich

$$S_1 = c_1\Delta l_1 = c_1\left(u_x\cos\alpha - u_y\sin\alpha\right),$$

$$S_2 = c_2\Delta l_2 = c_2 u_x,$$

$$S_3 = c_3\Delta l_3 = c_3\left(u_x\cos\alpha + u_y\sin\alpha\right).$$



Diese müssen noch die Gleichgewichtsbedingungen

$$x: \; -S_1\cos\alpha - S_2 - S_3\cos\alpha = 0$$

$$y: \quad S_1\sin\alpha - S_3\sin\alpha - F = 0$$

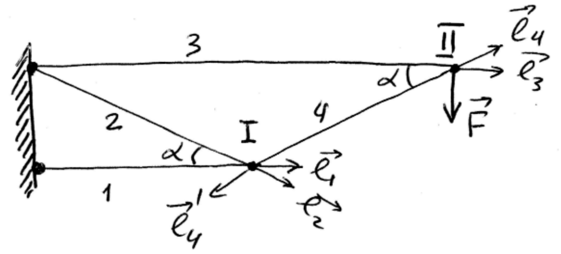
erfüllen. Das führt schließlich auf das Gleichungssystem für die gesuchten Verschiebungen:

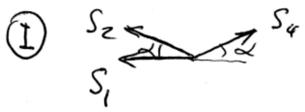
$$\begin{aligned} &-c_1\left(u_x\cos\alpha - u_y\sin\alpha\right)\cos\alpha - c_2 u_x \\ &-c_3\left(u_x\cos\alpha + u_y\sin\alpha\right)\cos\alpha = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

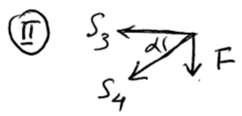
$$\begin{aligned} &c_1\left(u_x\cos\alpha - u_y\sin\alpha\right)\sin\alpha \\ &-c_3\left(u_x\cos\alpha + u_y\sin\alpha\right)\sin\alpha - F = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

VI. Statisch bestimmtes Stabwerk 3

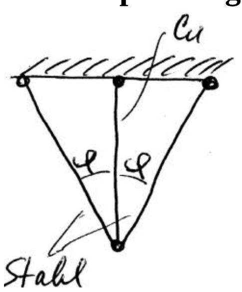
Zu bestimmen sind die Verschiebungen beider Knoten







VII. Statisch unbestimmtes Stabwerk mit Wärmespannungen



$$\alpha(Stahl) = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,1/\mathrm{K}$$

$$\alpha(Cu) = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\,1/\mathrm{K}$$

$$\Delta T = 100\,\mathrm{K}\,.$$

Zu bestimmen sind die thermischen Spannungen.