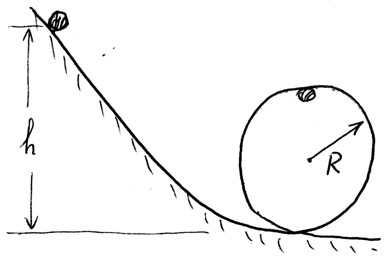
Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 9.

Energieerhaltung, Impulserhaltung

Literatur: ***Hauger, Schnell und Gross.*** **Technische Mechanik III, 1.2.7, 2.5**

I. Schleifenfahrt (Looping)

Ein Körper gleitet von einer Höhe h mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ eine schiefe Ebene hinab, die in einer Kreisschleife ausläuft. Es soll diejenige Höhe bestimmt werden, für die kein Ablösen von der Kreisbahn mit dem Radius R eintritt.



Bedingung dafür ist, daß der Bahndruck im höchsten Punkt P der Kreisbahn verschwindet, d.h.

$$m\frac{v_2^2}{R} = mg .$$

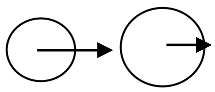
Eine Energiebilanz zwischen dem Anfangspunkt und dem höchsten Punkt in der Schleife liefert:

$$0 + mgh = 2mgR + m\frac{v_2^2}{2}$$

Daraus folgt die Höhe $\boxed{h = (5/2)R}$.

II. Elastischer Stoß

(a) gerader, zentrischer Stoß



Geschwindigkeiten vor dem Stoß: v_1 und v_2.

Geschwindigkeiten nach dem Stoß: v_1' und v_2'.

In einem abgeschlossenen System bleibt der Impuls erhalten:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' . \qquad (1)$$

Bei einem elastischen Stoß bleibt die Energie erhalten:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 . \qquad (2)$$

Diese Gleichungen können umgeschrieben werden:

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2)$$

$$m_1 \left(v_1^2 - v_1'^2\right) = m_2 \left(v_2'^2 - v_2^2\right)$$

Wir teilen die zweite Gleichung durch die erste:

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \text{ oder } v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2') \qquad (3)$$

Der Betrag der relativen Geschwindigkeit ändert sich beim elastischen Stoß nicht.

Aus dem linearen Gleichungssystem (1) und (3) folgt:

$$v_1' = -v_1 + 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = -v_2 + 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

(b) Nicht gerader, zentrischer Stoß (hier nur Sonderfall $m_1 = m_2$, $v_2 = 0$).

Der Impulserhaltungssatz nimmt die Form

$$m_1\vec{v}_1 + \cancel{m_2\vec{v}_2} = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

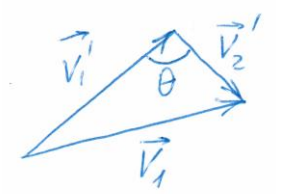
an.

Energieerhaltung:

$$m_1 v_1^2 + \cancel{m_2 v_2^2} = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 .$$

Bei gleichen Massen bedeutet das

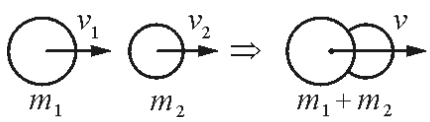
$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2' \quad \text{und} \quad v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 .$$



Aus der ersten Gleichung ist ersichtlich, dass die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_1'$ und $\vec{v}_2'$ ein Dreieck bilden. Die zweite Gleichung ist der Pythagoras-Satz. Daraus folgt, dass dies ein rechtwinkliges Dreieck ist ($\theta = 90°$): nach einem elastischen Stoß fliegen die Kugeln unter einem rechten Winkel zu einander.

III. Energieänderung beim plastischen Stoß

Betrachten wir noch einmal einen *plastischen Stoß*, d.h. einen Zusammenstoß zweier Körper, nach dem sie sich als ein Ganzes bewegen (an einander kleben).



Die Wechselwirkungskräfte zwischen beiden Körpern, unabhängig von deren Größe und physikalischer Herkunft sind *innere* Kräfte. Wirken am System keine weiteren Kräfte, so ist das ein abgeschlossenes System. Der Impuls des Systems bleibt deshalb erhalten. Insbesondre gilt das für beliebige Zeitpunkte vor und nach dem Stoß:

Impuls "vor": $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

Impuls "nach" $(m_1 + m_2)\vec{v}$

Wenn keine äußeren Kräfte gewirkt haben:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v} ;$$

$$\boxed{\vec v = \frac{m_1 \vec v_1 + m_2 \vec v_2}{m_1 + m_2}}$$

Wie steht es mit der Energie der Körper?

Die Energieänderung ist gleich

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

$$= \frac{(m_1+m_2)\left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2}\right)^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

$$= \frac{\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1+m_2} - m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2}{2}$$

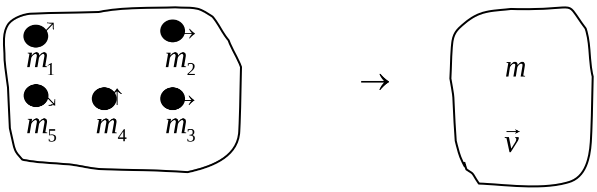
$$= \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2 - (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)(m_1+m_2)}{2(m_1+m_2)}$$

$$= \frac{\left(\cancel{m_1^2 v_1^2} + 2m_1 v_1 m_2 v_2 + \cancel{m_2^2 v_2^2}\right) - \left(\cancel{m_1^2 v_1^2} + \cancel{m_2^2 v_2^2}\right) - m_1 m_2 \left(v_1^2 + v_2^2\right)}{2(m_1+m_2)}$$

$$= \frac{2m_1 v_1 m_2 v_2 - m_1 m_2 \left(v_1^2 + v_2^2\right)}{2(m_1+m_2)} = -\frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1+m_2)}$$

und ist immer negativ: Bei einem plastischen Stoß geht Energie verloren!

IV. Kinetische Energie eines Mehrkörper-systems



$$K = \frac{mv^2}{2} \text{ ? } \textbf{ falsch !}$$

Wir betrachten zwei Koordinatensysteme: Laborsystem (x,y) und ein System, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec v$ des Schwerpunktes bewegt (Schwerpunktsystem).

Gegeben sind: die Geschwindigkeiten $\vec v_i$ im Schwerpunktsystem und die Geschwindigkeit $\vec v$ des Schwerpunktes.
Zu bestimmen ist gesamte kinetische Energie.

Die Geschwindigkeiten im Laborsystem sind $\vec v_i' = \vec v_i + \vec v$.
Die gesamte Kinetische Energie ist gleich

$$T = \sum \frac{m_i \vec v_i'^2}{2} = \sum \frac{m_i \left(\vec v_i + \vec v\right)^2}{2} =$$

$$= \sum \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum \frac{m_i 2\vec v_i \cdot \vec v}{2} + \sum \frac{m_i v^2}{2} =$$

$$= \sum \frac{m_i v_i^2}{2} + \underbrace{\vec v \cdot \sum m_i \vec v_i}_{=0} + \frac{v^2}{2} \underbrace{\sum m_i}_{m} =$$

$$= \frac{mv^2}{2} + \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$$

„Kinetische Energie des Schwerpunktes“

Kinetische Energie im Schwerpunkt System = „innere Energie“

z. B. Wärme