Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 7.
Arbeit, kinetische und potentielle Energie, Elastischer Stoß
Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik III, 1.2.7**

I. Mechanische Arbeit, Arbeitssatz

Betrachten wir einen Körper mit der Masse *m*, der sich unter der Wirkung einer (im Allgemeinen zeit- oder ortsabhängigen) Kraft F bewegt. Das zweite Newtonsche Gesetz für den Körper lautet: $m\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$.

Indem wir diese Gleichung mit $\vec{v}$ multiplizieren, erhalten wir

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}=\vec{F}\cdot\vec{v} \quad \text{(Skalarprodukt!)} \qquad (1)$$

Die linke Seite der Gleichung kann in der Form

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}=\frac{m}{2}\frac{d\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)}{dt}=\frac{m}{2}\frac{d\left(v^2\right)}{dt}$$

dargestellt werden. Die rechte Seite schreiben wir wie folgt um: $\vec{F}\cdot\vec{v}=\vec{F}\cdot\dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

Die Gleichung (1) nimmt die Form

$$\frac{m}{2}d\left(v^2\right)=\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

an. Bestimmte Integration ergibt

$$\int_{v_1}^{v_2}\frac{m}{2}d\left(v^2\right)=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \text{oder}$$

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}\,. \qquad (2)$$

Die Größe $K=\dfrac{mv^2}{2}$ ist die *kinetische Energie* des Körpers.

Das Integral $W=\displaystyle\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ nennt man die von der Kraft $\vec{F}$ auf dem Weg zwischen r_1 und r_2 geleistete *Arbeit.*

Gleichung (2) sagt aus, dass Änderung der kinetischen Energie eines Objektes gleich der durch die einwirkenden Kräfte geleisteten Arbeit ist.

$K_2-K_1=W$. **(Arbeitssatz)**

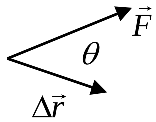
II. Eigenschaften der Arbeit.

-Arbeit ist als Integral $W=\displaystyle\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ definiert.

-Bei einer konstanten Kraft gilt

$$W=\vec{F}\cdot\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}d\vec{r}=\vec{F}\cdot\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

$$\boxed{W=F\Delta r\cos\theta}$$



- Wann ist W=0? $\Rightarrow$ $F=0$ oder $\Delta r=0$ oder $\theta=90°$.

- Die Arbeit von A nach B ist gleich Minus die Arbeit von B nach A.

-*Die Arbeit ist eine additive Größe* (Die Arbeit mehrerer gleichzeitig wirkender Kräfte ist gleich der Summe der Arbeiten einzelner Kräfte). Folgt aus der Definition.

III. Leistung

Betrachten wir die Bewegung innerhalb eines infinitesimal kleinen Zeitintervalls dt, so kann man den Arbeitssatz in der Differentialform schreiben: $dK=dW$.

Dividieren durch dt ergibt $\dfrac{dK}{dt}=\dfrac{dW}{dt}$. (3)

Die Größe dW/dt heißt *Leistung* der Kraft.

Gleichung (3) bedeutet, dass die zeitliche Änderung der kinetischen Energie eines Objektes gleich der durch die einwirkenden Kräfte aufgebrachten Leistung ist.

Einheiten:
[Arbeit] = Newton · Meter = {Joule}
[Leistung] = Joule pro Sekunde = {Watt}
1 Kilowattstunde $=10^3\cdot 3600$ J $=3{,}6\cdot 10^6$ Joule

IV. Potentielle Energie, Energieerhaltungssatz

Betrachten wir eine eindimensionale Bewegung unter der Einwirkung einer Kraft $F(x)$, die *nur von der Koordinate* abhängt.

Das zweite Newtonsche Gesetz lautet:

$m\dot{v}=F\left(x\right)$.

Multiplizieren mit v ergibt

$$m\frac{dv}{dt}v=F\left(x\right)\frac{dx}{dt} \quad \text{oder} \quad mvdv=F\left(x\right)dx$$

Bestimmte Integration ergibt

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\int_{x_0}^{x}F\left(x\right)dx=U\left(x_0\right)-U\left(x\right), \qquad (4)$$

wobei $U\left(x\right)=-\int F\left(x\right)dx$ Stammfunktion zur Funktion $-F(x)$ ist (unbestimmtes Integral).

(4) kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\frac{mv^2}{2}+U(x)=\frac{mv_0^2}{2}+U(x_0). \qquad (5)$$

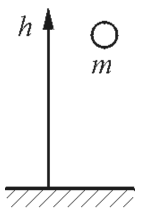
Die Größe $U(x)$ heißt *potentielle Energie* und die Summe $E=\frac{mv^2}{2}+U(x)=K+U$ - volle Energie des Systems.

> Gleichung (5) besagt, dass die volle Energie des Systems erhalten bleibt (Energieerhaltungssatz): $E=K+U=konst$.
> Der Energieerhaltungssatz in dieser Form gilt nur dann, wenn die Kräfte nur von der Koordinate abhängen (im Allgemeinen Fall gilt das für *konservative Kräfte,* s. nächste Vorlesung).

Bemerkung: Aus der Definition der potentiellen Energie folgt, dass $\boxed{F(x)=-\frac{\partial U}{\partial x}}$. Diese Gleichung nennt man 1. Satz von Castigliano.

V. Beispiele

1. *Potentielle Energie der Schwerekraft.*



Die Schwerekraft ist gleich $F=-mg$. Die Potentielle Energie ist demnach $U=\int mgdh=mgh+C$.

C ist eine beliebige Konstante, die z.B. gleich Null gesetzt werden kann. Der Energieerhaltungssatz hat die Form $\frac{mv^2}{2}+mgh=konst$.

2. *Potentielle Energie einer elastischen Feder.*

Die Federkraft ist gleich $F=-cx$.

Die potentielle Energie demnach

$$U=\int cxdx=c\frac{x^2}{2}.$$

Energieerhaltungssatz: $\frac{mv^2}{2}+c\frac{x^2}{2}=konst$.

3. *Potentielle Energie der Gravitationskraft im allgemeinen Fall.*

$$F=-G\frac{Mm}{r^2}.$$

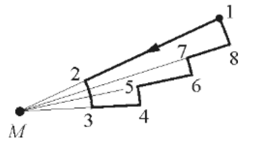
$$\boxed{U=\int G\frac{Mm}{r^2}dr=-G\frac{Mm}{r}}.$$

Energieerhaltungssatz:

$$E=\frac{mv^2}{2}-G\frac{Mm}{r}=konst.$$

Ist ein Perpetuum mobile möglich?

Die auf dem geschlossenen Weg geleistete Arbeit ist gleich

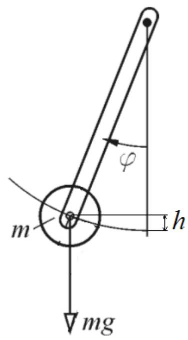


$$W=GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_6}-\frac{1}{r_5}+\frac{1}{r_8}-\frac{1}{r_7}\right)\equiv 0$$

Kräfte, deren Arbeit auf *jedem* geschlossenen Weg Null ist, heißen *konservativ.*

VI. Ein Pendel

Zu bestimmen ist das Bewegungsgesetz und die Stangenkraft für ein Pendel bestehend aus einem leichten Stab und einer Kugel, die man als einen Massenpunkt betrachten kann. Zum Zeitpunkt $t=0$ wird es aus der Ruhelage um den Winkel φ_0 ausgelenkt und freigelassen.



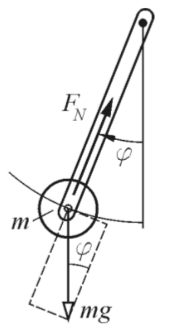
Lösung: Wir stellen zunächst den Energieerhaltungssatz auf $\frac{mv^2}{2}+mgh=\frac{mv_0^2}{2}+mgh_0$.

Unter Berücksichtigung der geometrischen Beziehung $h=l(1-\cos\varphi)$ und $v_0=0$ ergibt sich $\frac{v^2}{2}+gl(1-\cos\varphi)=gl(1-\cos\varphi_0)$

Daraus folgt

$$v=\sqrt{2gl(\cos\varphi-\cos\varphi_0)}.$$

Wir wollen das 2. Newtonsche Gesetz in polarer Basis schreiben. Die zirkularen und radialen Komponenten der Beschleunigung sind gleich



$$a_\varphi=l\ddot{\varphi},\; a_r=-l(\dot{\varphi})^2$$

Für die zirkularen und radialen Kraftkomponenten erhalten wir:

$$F_\varphi=-mg\sin\varphi \quad F_r=mg\cos\varphi-F_N$$

Das 2.N.G. ist dann: $ml\ddot{\varphi}=-mg\sin\varphi$, $-ml(\dot{\varphi})^2=mg\cos\varphi-F_N$ an.

Aus der zweiten Gleichung können wir die Stangenkraft als Funktion des Winkels φ berechnen:

$$F_N=mg\cos\varphi+m\frac{v^2}{l}=mg(3\cos\varphi-2\cos\varphi_0).$$

Das Bewegungsgesetz bekommen wir aus der Gleichung $v=l\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{2gl(\cos\varphi-\cos\varphi_0)}$ durch Trennung der Variablen und Integration.