Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 6.

Impuls, Kraftstoß, Schwerpunktsatz, Impulserhaltung, Stoß

Literatur: ***Hauger, Schnell und Gross.* Technische Mechanik III, 1.2.5, 2.2, 2.5**

I. Impuls. Die vektorielle Größe $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$ heißt *Impuls* des Körpers. Der Gesamtimpuls eines Mehrkörpersystems berechnet sich als Summe der Impulse seiner Bestandteile:

$$\boxed{\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i}.$$

II. Impulssatz.

Geschrieben in der Form $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$ trägt das 2. Newtonsche Gesetz den Namen *Impulssatz.*

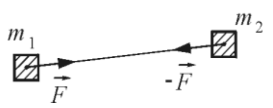
III. Kraftstoß. Durch Multiplizieren mit $\mathrm{d}t$ und Integration kann der Impulssatz in der folgenden *Integralform* dargestellt werden:

$$\int_{\vec{p}(t_1)}^{\vec{p}(t_2)} \mathrm{d}\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t}$$

Die Änderung des Impulses ist somit gleich der Größe $\hat{F} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t$, die *Kraftstoß* heißt.

IV. Abgeschlossenes System.
Ein Mehrkörpersystem heißt *abgeschlossen,* wenn die zu ihm gehörigen Körper nur miteinander wechselwirken.

V. Impulserhaltungssatz
Betrachten wir ein *abgeschlossenes* System bestehend aus zwei Körpern. Diese Körper wechselwirken nur mit einander.



Die Wechselwirkungskräfte genügen dem 3. Newtonschen Gesetz (actio=reactio). Das 2. Newtonsche Gesetz für jeden Körper kann demnach wie folgt geschrieben werden:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F} \qquad m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = -\vec{F}.$$

Summieren beider Gleichungen ergibt

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0 \text{ oder } \frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right) = 0$$

In der Klammer steht der Gesamtimpuls des Systems: $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = 0$. Daraus folgt:

$$\boxed{\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + \vec{m}_2\vec{v}_2 = const}$$

Der Impuls eines *abgeschlossenen* Systems bleibt erhalten **(Impulserhaltungssatz).**

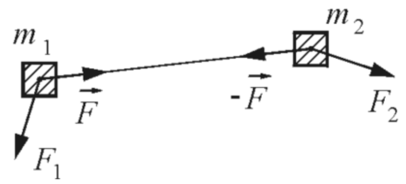
Dieser Satz gilt für ein abgeschlossenes System bestehend aus beliebiger Zahl von Körpern.

VI. Innere und äußere Kräfte
Die Kräfte, mit denen die Körper, die zu einem System gehören, mit einander wechselwirken, nennen wir *innere Kräfte*.

Die Kräfte, mit denen die Körper des Systems mit den Körpern außerhalb des Systems wechselwirken, nennen wir *äußere Kräfte.*

Diese Definitionen sind systemabhängig. So ist z.B. die Wechselwirkungskraft zwischen der Sonne und der Erde eine innere Kraft, wenn wir die Sonne *und* die Erde als *ein* System betrachten. Betrachten wir dagegen nur die Erde als "System", so ist das eine äußere Kraft.

VII. Impulssatz für ein Mehrkörpersystem
Betrachten wir jetzt ein *nicht abgeschlossenes (offenes)* System, d.h. ein System, dessen Körper auch mit Körpern außerhalb des Systems wechselwirken.



$\vec{F}$ und $-\vec{F}$ sind hier *innere* Kräfte. $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ sind *äußere* Kräfte. Das 2. Newtonsche Gesetz für die beiden Körper lautet:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_1; \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = -\vec{F} + \vec{F}_2.$$

Addition dieser Gleichungen ergibt

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{ext}}$$

$\vec{F}_{ext}$ ist die Summe *aller äußeren Kräfte.*

Impulssatz:
Die zeitliche Ableitung des Impulses eines Systems ist gleich der Summe aller *äußeren* Kräfte, die auf dieses System wirken.

Teilerhaltung des Impulses:
Ist die Projektion der resultierenden äußeren Kraft auf die x-Achse Null, so bleibt die x-Projektion des Impulses erhalten.

Beweis: Der Impulssatz $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}_{ext}$ in der Projektion auf die x-Achse lautet: $\frac{dp_x}{dt}=0$.

Daraus folgt $p_x = const$.

VIII. Schwerpunktsatz

Der Radiusvektor des Schwerpunkts eines Systems wird wie folgt definiert:

$$\vec{R}_s=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\cdots}{m_1+m_2+\cdots}=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{M},$$

wobei *M* die Gesamtmasse des Systems ist. Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes berechnet sich als zeitliche Ableitung dieses Vektors:

$$\vec{V}_s=\dot{\vec{R}}_s=\frac{m_1\dot{\vec{r}}_1+m_2\dot{\vec{r}}_2+\cdots}{m_1+m_2+\cdots}=\frac{\sum m_i\vec{v}_i}{M}=\frac{\vec{p}}{M}.$$

Betrachten wir zwei Fälle:

a) Abgeschlossenes System

$$\frac{d\vec{R}_s}{dt}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\cdots}{m_1+m_2+\cdots}=\frac{\vec{p}}{M}=const:$$

Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

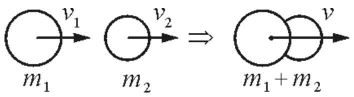
b) Offenes System

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d\vec{p}/dt}{M}=\frac{\vec{F}_{ext}}{M} \text{ oder } \boxed{M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=\vec{F}_{ext}}.$$

> **Schwerpunktsatz:** Der Schwerpunkt eines Systems bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen.

IX. Plastischer Stoß

Betrachten wir den Zusammenstoß zweier Körper, nach dem sie sich als ein Ganzes bewegen (an einander kleben).



Solch einen Stoß nennt man *plastischer Stoß.* Die Wechselwirkungskräfte zwischen beiden Körpern, unabhängig von deren Größe und physikalischer Herkunft sind *innere* Kräfte. Wirken am System keine weiteren Kräfte, so ist das ein abgeschlossenes System. Der Impuls des Systems bleibt deshalb erhalten. Insbesondre gilt das für beliebige Zeitpunkte vor und nach dem Stoß:

Impuls vor dem Stoß: $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$

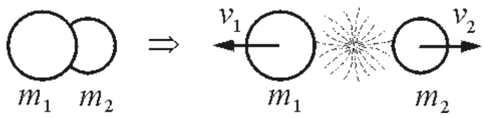
Impuls nach dem Stoß $(m_1+m_2)\vec{v}$

Wenn keine äußeren Kräfte gewirkt haben:

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{v} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}}$$

X. Zerfall (z.B. durch eine Explosion)



Impuls "vor": $(m_1+m_2)\cdot 0=0$

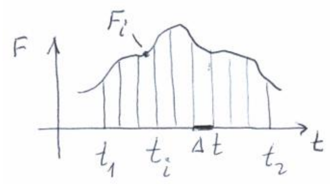
Impuls "nach": $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$

Impulserhaltungssatz: $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=0$

$$\boxed{\vec{v}_2=-\vec{v}_1\frac{m_1}{m_2}}$$

XI. Mittelwert einer Kraft

Betrachten wir eine von der Zeit abhängige Kraft $F(t)$. Den *Mittelwert* dieser Kraft auf dem Zeitintervall von t_1 bis t_2 können wir bestimmen, indem wir das Zeitintervall in eine sehr große Zahl N von Teilintervallen Δt unterteilen (offensichtlich gilt $N\Delta t=t_2-t_1$).



Den Mittelwert $\bar{F}$ (der Strich über dem Buchstaben bedeutet "Mittelwert") berechnet man mit der bekannten Regel $\bar{F}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_i$. Indem wir diese Gleichung mit Δt multiplizieren und dividieren, erhalten wir $\bar{F}=\frac{\sum_{i=1}^{N}F_i\Delta t}{N\Delta t}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}F(t)dt}{t_2-t_1}$.

Nach dem Impulssatz in der Integralform gilt $\int_{t_1}^{t_2}F(t)dt=p_2-p_1$, wobei p_2 und p_1 Impulse des Systems zu den Zeitpunkten t_2 und t_1 sind. Für den Mittelwert der Kraft ergibt sich somit

> $$\bar{F}=\frac{p_2-p_1}{t_2-t_1}$$
>
> Der Mittelwert der Kraft ist gleich der Änderung des Impulses dividiert durch das Zeitintervall, in dem diese Änderung stattgefunden hat.