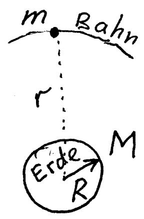
Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 5.

Das 2. Newtonsche Gesetz: Anwendungsbeispiele.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Gross.*** **Technische Mechanik III, 1.1.3, 1.2.4**

Beispiel 1. Geostationäre Satelliten



Verläuft die Bewegung eines Satelliten in der Äquatorebene der Erde und ist die Umlaufzeit gleich einem Tag, so "hängt" der Satellit immer über dem gleichen Punkt der Erde. Die einzige auf ihn wirkende Kraft ist die zum Zentrum gerichtete Gravitationskraft $|F_r| = G\dfrac{Mm}{r^2}$. Bei einer Bewegung auf dem Kreis ist Beschleunigung ebenfalls zum Zentrum gerichtet und gleich $|a_r| = r\omega^2$, wobei $\omega = 2\pi/T$ die Winkelgeschwindigkeit ist (T=1 Tag ist die Umdrehungsperiode). Das 2.N.G. besagt, dass

$$G\frac{Mm}{r^2} = mr\omega^2 = mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow r = \left(\frac{GMT^2}{(2\pi)^2}\right)^{1/3} \quad (1)$$

Die Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche ist gleich $g = GM/R^2$ mit $R = 6380\cdot 10^3 m$ als Erdradius. Daraus folgt $GM = gR^2$. Einsetzen in (1) liefert

$$r = \left(\frac{gR^2T^2}{(2\pi)^2}\right)^{1/3} \approx \left(\frac{9,8\cdot\left(6,38\cdot 10^6\right)^2\left(24\cdot 3600\right)^2}{(2\pi)^2}\right)^{1/3}$$

$\approx 42000km$. Das entspricht einer Höhe über der Erdoberfläche von ca. $35620km$.

Beispiel 2. Vertikaler Start einer Rakete

Zu berechnen ist die Fluchtgeschwindigkeit bei einem vertikalen Start einer Rakete (Luftwiderstand ist zu vernachlässigen).

<u>Lösung:</u> Es liegt eine eindimensionale Bewegung vor. Das 2.N.G. für die radiale Bewegung lautet $\ddot{r} = -\dfrac{GM}{r^2}$. Die Beschleunigung ist hier eine Funktion der Koordinate. Man löst diese Differentialgleichung durch Multiplizieren beider Seiten mit der Geschwindigkeit $v_r = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ und Berücksichtigung, dass

$$\ddot{x} = a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{dv_r}{dr}\cdot v_r .$$

Die Bewegungsgleichung nimmt die Form $\dfrac{dv_r}{dr}\cdot v_r = -\dfrac{GM}{r^2}$ an.

Multiplizieren mit dr ergibt

$$v_r dv_r = -\frac{GM}{r^2}dr .$$

Eine bestimmte Integration führt auf

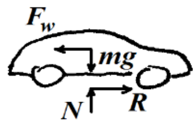
$$\frac{v_r^2}{2} - \frac{v_r^2(0)}{2} = GM\left(-\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)$$

Die gesuchte Geschwindigkeit ist eine solche, bei der $v \to 0$ wenn $r \to \infty$

$$v_r(0) = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} \approx 11,2km/s .$$

Beispiel 3. Maximale Geschwindigkeit eines Autos.

In der vertikalen Richtung gibt es keine Bewegung. Unter Vernachlässigung der Auftriebskraft gilt daher: $N = mg$.

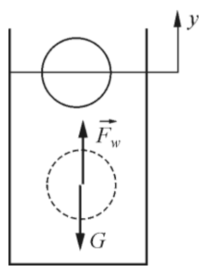


Da sich das Auto mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegen soll, lautet die horizontale Komponente des 2.N.G.: $m\cdot 0 = -F_w + R$, wobei $R = \mu mg$ die maximale erreichbare Reibungskraft zwischen den Rädern und der Straße ist und $F_w = \frac{1}{2}c_w\rho A v^2$ die (turbulente) Widerstandskraft. Aus

$\mu mg = \frac{1}{2}c_w\rho A v^2$ folgt $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{2\mu mg}{c_w\rho A}}}$.

Mit den charakteristischen Werten: $c_w = 0,4$, $A = 2,5m^2$, $\rho = 1,2kg/m^3$, $m = 1600kg$, $\mu = 0.8$ erhalten wir $v \approx 146m/s \approx 525km/h$.

Beispiel 4. Freier Fall in einer viskosen Flüssigkeit



Zu bestimmen ist das Bewegungsgesetz einer in einer Flüssigkeit frei fallenden Kugel mit den Anfangsbedingungen: $y(0) = 0$, $v_y(0) = 0$.

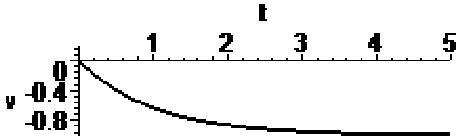
Lösung. Das 2. N. G. lautet:

$m\dfrac{dv_y}{dt} = -mg - \alpha v_y$. Multiplikation mit dt ergibt $dv_y = -\left(g + \dfrac{\alpha}{m}v_y\right)dt$. Nach Trennung der Variablen und bestimmter Integration erhalten wir

$$\int_0^{v_y}\frac{dv_y}{g+\frac{\alpha}{m}v_y} = -\int_0^t dt = -t \;\Rightarrow$$

$$\frac{m}{\alpha}\ln\left(g+\frac{\alpha}{m}v_y\right)\Bigg|_0^{v_y}=-t \;\Rightarrow$$

$$\frac{m}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\alpha}{mg}v_y\right)=-t \;\Rightarrow\; v_y=\frac{mg}{\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha t}{m}}-1\right)$$

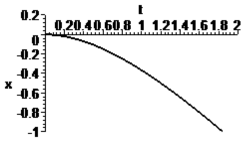


Für sehr große Zeit t erreicht die Geschwindigkeit den Grenzwert $-\frac{mg}{\alpha}$. Das Minus-Zeichen zeigt, dass sich die Kugel in die negative y-Richtung bewegt.
Zur Bestimmung der Koordinate schreiben wir die Geschwindigkeit als zeitliche Ableitung $\frac{dy}{dt}=\frac{mg}{\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha t}{m}}-1\right)$, multiplizieren diese Gleichung mit dt und integrieren bestimmt

$$\int_0^y dy=\int_0^t \frac{mg}{\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha t}{m}}-1\right)dt.$$

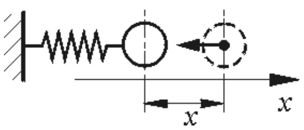
Ergebnis:

$$y=-\frac{mg}{\alpha}t+\frac{m^2}{\alpha^2}g\left(1-e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)$$



Beispiel 5. Ein Feder-Masse-System

Zu bestimmen ist das Bewegungsgesetz einer mit einer Feder gekoppelten Masse.



Die Anfangsbedingungen für $t=0$ lauten $v(0)=0$; $x(0)=x_0$.

Lösung: Wir betrachten nur die Bewegung in horizontaler Richtung und vernachlässigen die Reibung in dieser Richtung. Die einzige Kraft, die unter diesen Voraussetzungen auf den aus der Ruhelage ausgelenkten Körper wirkt, ist die Federkraft $F=-kx$. Das 2.N.G. sieht wie folgt aus: $ma=-kx \;\Rightarrow\; a=-(k/m)x$. Mit der Bezeichnung $k/m=\omega^2$ schreiben wir es in der Form $a=-\omega^2 x$ oder $\frac{dv}{dt}=-\omega^2 x$.

Mit der Identität $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}v$ ergibt sich $\frac{dv}{dx}\cdot v=-\omega^2 x$. Multiplikation mit dx und bestimmte Integration ergibt

$$\int_0^v v\,dv=-\int_{x_0}^x \omega^2 x\,dx \;\Rightarrow\; \frac{v^2}{2}-0=\omega^2\left(\frac{x_0^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right)$$

Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit als Funktion der Koordinate: $v=\omega\sqrt{x_0^2-x^2}$. Wir schreiben nun die Geschwindigkeit als zeitliche Ableitung der Koordinate:
$\frac{dx}{dt}=\omega\sqrt{x_0^2-x^2}$, trennen die Variablen und integrieren bestimmt:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x_0^2-x^2}}=\int_0^t \omega\,dt=\omega t.$$

Mit der Substitution

$$\left|\begin{array}{ll} x=x_0\sin z & x\big|_{x_0}^{x}\to z\big|_{\arcsin(1)}^{\arcsin(x/x_0)} \\ dx=x_0\cos z\cdot dz & \sqrt{x_0^2-x^2}=x_0\cos z \end{array}\right|$$

erhalten wir

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x_0^2-x^2}}=\int_{\arcsin(1)}^{\arcsin(x/x_0)}\frac{x_0\cos z\cdot dz}{x_0\cos z}=z\Big|_{\arcsin(1)}^{\arcsin(x/x_0)}$$

$$\arcsin(x/x_0)-\pi/2=\omega t$$

Daraus folgt $x=x_0\sin(\omega t+\pi/2)$

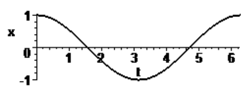
Alternative:

$$\int_{x_0}^x \frac{d(x/x_0)}{\sqrt{1-(x/x_0)^2}}=\left[\begin{array}{l} x/x_0=z: \\ z\,\big|_1^{x/x_0} \end{array}\right]=\int_1^{x/x_0}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=$$

$$=\arcsin z\,\big|_1^{x/x_0}=\arcsin\frac{x}{x_0}-\arcsin 1=\omega t$$

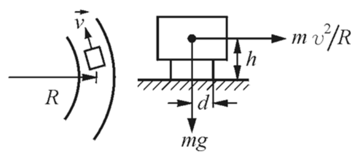
Umkehren dieser Funktion ergibt

$$x=x_0\sin(\omega t+\pi/2)=x_0\cos\omega t$$



Beispiel 6. Scheinkräfte.

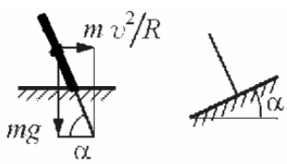
A. Wann kippt ein Auto um?



Gleichgewicht der Kraftmomente bezüglich des rechten Rades (im rotierenden Bezugssystem!!):

$$m(v^2/R)h=mgd \;\Rightarrow\; \boxed{v=\sqrt{Rgd/h}}.$$

B. Neigung eines Motorradfahrers



C. Zentrifuge. Durchmesser = 45 cm,1400 Umdrehungen pro Minute. Zu bestimmen ist die effektive Fallbeschleunigung in dem mit der Zentrifuge verbundenen Bezugssystem.