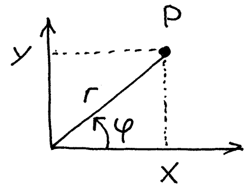
Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 2.

Ebene und räumliche Bewegung: Polarkoordinaten, Kugelkoordinaten, Vektoren.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Gross.*** **Technische Mechanik 1II, 1.1.4**

I. Ebene Bewegung. Kartesische und Polarkoordinaten. Die Lage eines Massenpunktes auf einer Ebene wird durch zwei Koordinaten beschrieben. Meistens werden dafür entweder kartesische oder polare Koordinaten benutzt.



Kartesische Koordinaten: (x,y)

Polarkoordinaten: (r,φ)

Der Zusammenhang zwischen beiden wird durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

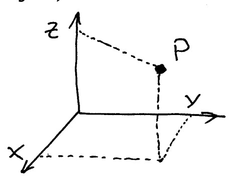
Umgekehrt gilt:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan\left(y/x\right) \end{cases}.$$

II. Räumliche Bewegung. Kartesische, zylindrische und Kugelkoordinaten.

In drei Dimensionen wird die Lage eines Massenpunktes mit drei Koordinaten gegeben. Definition von kartesischen, zylindrischen und Kugelkoordinaten sowie Zusammenhänge zwischen ihnen werden mit den drei nachfolgenden Bildern illustriert.

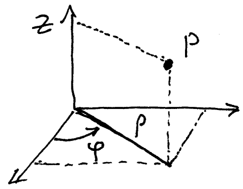
Kartesische Koordinaten**:** (x,y,z)



Zylindrische Koordinaten: (ρ , φ ,z)

Zusammenhang mit kartesischen Koordinaten:

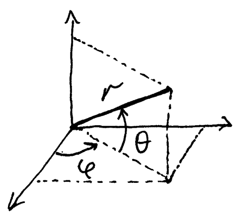
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$



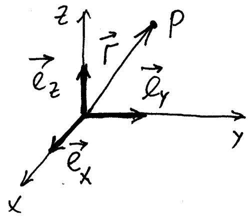
Kugelkoordinaten*:* (r,φ,θ)

Zusammenhang mit kartesischen Koordinaten:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$



III. Vektorielle Darstellung. Orthonormierte Basen.



(x,y,z) seien kartesische Koordinaten des Massenpunktes P in einem *rechtshändigen* Koordinatensystem. Alternativ kann die Lage des Punktes mit dem *Radiusvektor* $\vec{r}$ charakterisiert werden. Definieren wir drei Vektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, die entlang der Koordinatenachsen gerichtet sind und je die Länge Eins haben. Diese drei *Einheitsvektoren* sind zueinander orthogonal und bilden eine *orthonormierte Basis.*

Jeder Vektor kann in seine kartesischen Komponenten zerlegt werden:

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \equiv \left(x, y, z\right).$$

Kartesische Koordinaten können als Skalarprodukte des Vektors mit entsprechenden Basisvektoren bestimmt werden:

$$x = \vec{r}\cdot\vec{e}_x,\quad y = \vec{r}\cdot\vec{e}_y,\quad z = \vec{r}\cdot\vec{e}_z.$$

In dem beschriebenen Fall einer konstanten kartesischen Basis (Einheitsvektoren der Basis sind "raumfest") leitet man den Radiusvektor ab, indem man seine Komponenten ableitet:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_x + \dot{\vec{r}}_y + \dot{\vec{r}}_z = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \equiv \left(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right).$$

Diese Gleichung kann man auch als

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z \equiv \left(v_x, v_y, v_z\right)$$

schreiben. Eine weitere Ableitung ergibt die Beschleunigung:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_x + \dot{\vec{v}}_y + \dot{\vec{v}}_z = \dot{v}_x\vec{e}_x + \dot{v}_y\vec{e}_y + \dot{v}_z\vec{e}_z \equiv \left(\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z\right) =$$

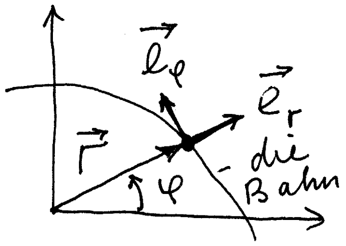
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_x + \ddot{\vec{r}}_y + \ddot{\vec{r}}_z = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z \equiv \left(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}\right) =$$

$$= \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z \equiv \left(a_x, a_y, a_z\right)$$

IV. Polare Basis.

Die orthonormierte Basis, in die man den Vektor zerlegt, muß nicht unbedingt konstant sein: Sie kann sich als Ganzes (als orthonormiertes Dreibein) bewegen; dabei ändern sich die Richtungen der Basisvektoren; beide Vektoren bleiben aber orthogonal zu einander und ihre Länge bleibt Eins.

Im Weiteren untersuchen wir ebene Bewegung näher. Zur Beschreibung ebener Bewegung wird in der Mechanik sehr oft die sogenannte "polare Basis" benutzt.



Als Basis führt man zwei Einheitsvektoren ein: $\vec{e}_r$ in Richtung des Radius-Vektors eines Massenpunktes und $\vec{e}_\varphi$ senkrecht zu $\vec{e}_r$ (s. Bild).

Selbstverständlich bewegt sich die polare Basis zusammen mit dem Radiusvektor. Der Radiusvektor kann in der polaren Basis besonders einfach dargestellt werden: $\vec{r} = r\vec{e}_r$.

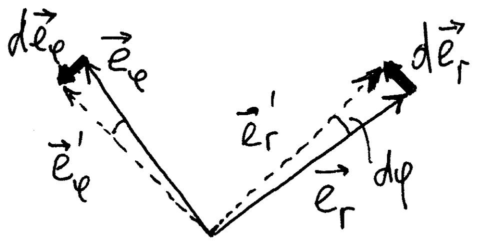
Bei der zeitlichen Ableitung muss man aber beachten, dass sich auch die Basisvektoren mit der Zeit ändern:

$$\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(t).$$

Beim Ableiten muss man die Regel zum Ableiten von Produkten benutzen:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t)\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\vec{e}}_r(t). \qquad (1)$$

Um weiter zu verfahren, brauchen wir die zeitliche Ableitung von Basisvektoren. Diese wird mit der nachstehenden Skizze illustriert.



$d\vec{e}_r$ zeigt in Richtung $\vec{e}_\varphi$ und hat die Länge $1 \cdot d\varphi = d\varphi$. Daher: $\boxed{d\vec{e}_r = d\varphi\vec{e}_\varphi}$.

$d\vec{e}_\varphi$ zeigt in Richtung $-\vec{e}_r$ und hat die Länge $1 \cdot d\varphi = d\varphi$. Daher: $\boxed{d\vec{e}_\varphi = -d\varphi\vec{e}_r}$.

Indem wir diese Gleichungen durch dt dividieren und erkennen, dass $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$, erhalten wir

$$\boxed{\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi}, \quad \boxed{\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_r}.$$

Für die zeitliche Ableitung des Radiusvektors (Gleichung (1)) ergibt sich somit

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t)\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi.$$

Eine weitere Ableitung liefert den Beschleunigungsvektor:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} =$$

$$\ddot{r}(t)\vec{e}_r + \dot{r}(t)\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}(t)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r(t)\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r(t)\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi =$$

$$\ddot{r}(t)\vec{e}_r + \dot{r}(t)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{r}(t)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r(t)\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - r(t)\dot{\varphi}^2\vec{e}_r$$

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\left(\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r}_{radialeKomponente} + \underbrace{\left(2\dot{r}(t)\dot{\varphi} + r(t)\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi}_{zirkulareKomponente}} \quad (2)$$

Die zeitliche Ableitung des polaren Winkels $\dot{\varphi} \equiv \omega$ nennt man *Winkelgeschwindigkeit.*

Sonderfall: Bewegung auf einer Kreisbahn

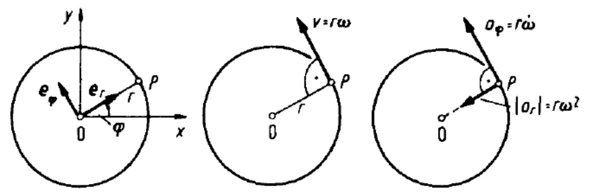
Bewegt sich ein Massenpunkt auf einem Kreis mit dem Radius r, so gilt $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$. Die Gleichung (1) nimmt die Form $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) = r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ an. Die Geschwindigkeit ist immer senkrecht zum Radius (und tangential zum Kreis gerichtet) und betragsmäßig gleich

$$v = r\dot{\varphi} = r\omega.$$

Die Gleichung (2) nimmt die Form $\vec{a} = -r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r(t) + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi(t)$ an. Die Beschleunigung hat die Komponente in Tangentialrichtung $a_\varphi = r\dot{\omega}$ und die Komponente in radialer Richtung

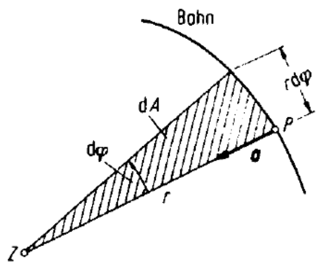
$$\boxed{a_r = -r\dot{\varphi}^2 = -r\omega^2 = -\frac{v^2}{r}}$$

Sie ist nach innen - zum Zentrum hin - gerichtet und heißt daher *Zentripetalbeschleunigung.*



Sonderfall: Zentralbewegung

Bei der *Zentralbewegung* ist der Beschleunigungsvektor stets auf *einen* Punkt, das Zentrum Z, hin gerichtet. Dies trifft zum Beispiel für die Bewegung der Planeten zu.



Bei einer Zentralbewegung verschwindet die zirkulare Komponente der Beschleunigung, wenn wir den Koordinatenursprung in das Zentrum legen:

$$a_\varphi = 2\dot{r}(t)\omega + r(t)\dot{\omega} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\omega\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$r^2\omega = const$$

Nach dem Bild überstreicht der Fahrstrahl r in der Zeit $\mathrm{d}t$ die Fläche $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}rr\mathrm{d}\varphi$. Die *Flächengeschwindigkeit* $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t = \frac{1}{2}rr\omega$ bleibt daher konstant (das 2. Keplersche Gesetz).