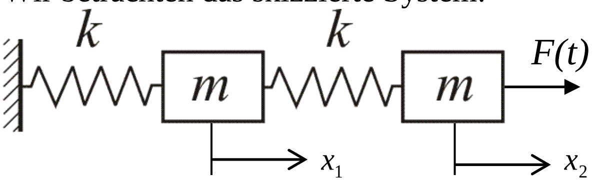
Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 24.

Erzwungene Schwingungen mit zwei Freiheitsgraden

Literatur: ***Hauger, Schell und Gross.*** **Technische Mechanik III, 5.4.2**

I. Erzwungene ungedämpfte Schwingungen.

Wir betrachten das skizzierte System:



Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) + F(t) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) + \frac{F(t)}{m} \end{aligned}\right\}$$

Die allgemeine Lösung dieser nicht homogenen DGL ist gleich der Summe einer Partikularlösung der nicht homogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung.

(a) Lösung der homogenen Gleichung.
In ungedämpften Systemen kann man auf gleiche Weise einen Sinus- oder Kosinus- oder Exponentialansatz verwenden. Nehmen wir den cos-Ansatz: $x_1 = X\cos\omega t$, $x_2 = Y\cos\omega t$.
Einsetzen in die Bewegungsgleichungen liefert

$$\left.\begin{aligned} -m\omega^2 X &= -kX + k(Y - X) \\ -m\omega^2 Y &= -k(Y - X) \end{aligned}\right\}$$

oder nach Umformung

$$\left.\begin{aligned} \left(2k - m\omega^2\right)X - kY &= 0 \\ -kX + \left(k - m\omega^2\right)Y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Bedingung für die Lösbarkeit des Systems *(charakteristische Gleichung):*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(2k - m\omega^2\right) & -k \\ -k & \left(k - m\omega^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta = \omega^4 - \frac{3k}{m}\omega^2 + \frac{k^2}{m^2} = 0 \qquad (2)$$

<u>Eigenfrequenzen</u>:

$$\left(\omega^2\right)_{1,2} = \frac{3k}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{3k}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2} = \frac{k}{m}\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\boxed{\omega_1 = 1.62k/m}, \boxed{\omega_2 = 0.62k/m} \qquad (3)$$

<u>Eigenformen</u> bekommt man, indem man (3) in (1) einsetzt: $Y = \left(2 - m\omega^2/k\right)X$.

Die Determinante (2) kann man nach dem Theorem von Viet umformen (wird später benutzt): $\Delta = \left(\omega^2 - \omega_1^2\right)\left(\omega^2 - \omega_2^2\right)$ (4).

(b) Partikularlösung der nicht homogenen Gleichung.
Die äußere Kraft sei $F(t) = F_0\cos\Omega t$.
In ungedämpften Systemen werden die Lösungen in der gleichen Form wie die Krafterregung gesucht: $x_1 = X\cos\omega t$, $x_2 = Y\cos\omega t$. Einsetzen in die Bewegungsgleichungen liefert

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{2k}{m} - \Omega^2\right)X - \frac{k}{m}Y &= 0 \\ -\frac{k}{m}X + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right)Y &= \frac{F_0}{m} = f_0 \end{aligned}\right\}$$

Die Determinanten Δ_X und Δ_Y sind

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} 0, & -\frac{k}{m} \\ f_0, & \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) \end{vmatrix} = f_0\frac{k}{m},$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} \left(\frac{2}{m} - \Omega^2\right), & 0 \\ -\frac{k}{m}, & f_0 \end{vmatrix} = f_0\left(\frac{2}{m} - \Omega^2\right).$$

Somit

$$X = \frac{\Delta_X}{\Delta} = f_0\frac{k/m}{\left(\Omega^2 - \omega_1^2\right)\left(\Omega^2 - \omega_2^2\right)}, \qquad (5)$$

$$Y = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = f_0\frac{2k/m - \Omega^2}{\left(\Omega^2 - \omega_1^2\right)\left(\Omega^2 - \omega_2^2\right)}. \qquad (6)$$

X und *Y* werden ∞ groß bei $\Omega = \omega_1$ und $\Omega = \omega_2$ (zwei Resonanzen).

Numerisches Beispiel. Betrachten wir folgendes numerisches Beispiel: $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = k_2 = 1$. Die Eigenfrequenzen sind: $\omega_1 = 1.62s^{-1}$, $\omega_2 = 0.62s^{-1}$.
Die Schwingungsamplituden (5) und (6) sind

$$X = f_0\frac{1}{\left(\Omega^2 - 1.62^2\right)\left(\Omega^2 - 0.62^2\right)} \qquad (7)$$

$$Y = f_0\frac{2 - \Omega^2}{\left(\Omega^2 - 1.62^2\right)\left(\Omega^2 - 0.62^2\right)} \qquad (8)$$

(S. Bild). Aus den Gleichungen (7) und (8) kann man folgende <u>Schlussfolgerungen</u> ziehen:

➢ Beide Amplituden werden bei den beiden Eigenfrequenzen $\Omega = \omega_1 = 1.62$ und $\Omega = \omega_2 = 0.62$ unendlich (*Resonanz*).

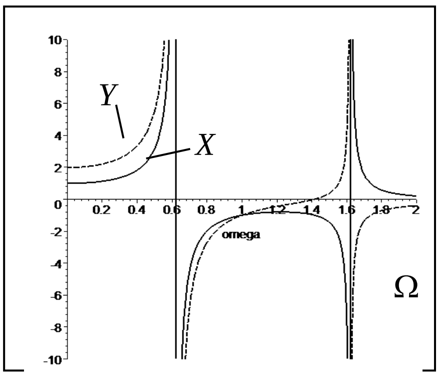
➢ Das Verhältnis der Amplituden ist $Y/X = 2 - \Omega^2$.

$Y/X\big|_{\omega=\omega_1} = 2 - \omega_1^2 = -0.62$

$Y/X\big|_{\omega=\omega_2} = 2 - \omega_2^2 = 1.62$.

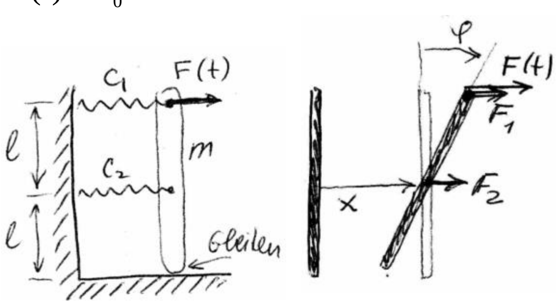
Das bedeutet, dass **bei jeder der zwei Resonanzen *genau die jeweilige Eigenform* angeregt wird.** $\Rightarrow$ Methode zur experimentellen Untersuchung von Eigenformen (experimentelle Modalanalyse).

➢ Die Schwingungsamplitude X ist immer von Null verschieden. Die Schwingungsamplitude Y dagegen wird Null bei $\omega_t^2 = 2$. [Im allgemeinen Fall $\omega_t^2 = (k_1 + k_2)/m_1$]. Das bedeutet, dass *trotz der anregenden Kraft, die auf den zweiten Körper wirkt, sich dieser nicht bewegt!* Dies ist der sogenannte ***Tilgereffekt***. Die entsprechende Frequenz ist die ***Tilgerfrequenz.*** $\Rightarrow$ Praktische Anwendung zur Schwingungstilgung.



II. Schwingungen eines starren Körpers mit 2 Freiheitsgraden.

Zu bestimmen sind die freien und die erzwungenen Schwingungen des skizzierten Systems *ohne Berücksichtigung der Schwerekraft* für $F(t) = F_0 \cos \Omega t$.



Für die elastischen Federkräfte gilt
$F_1 = -c_1(x + l\varphi)$, $\quad F_2 = -c_2 x$.

Der Schwerpunktsatz für den starren Körper:

$m\ddot{x} = -(c_1 + c_2)x - c_1 l\varphi + F(t)$,

Der Drallsatz *bezüglich des Schwerpunkts*:

$\Theta\ddot{\varphi} = -c_1(x + l\varphi)l + lF(t)$

($\Theta = ml^2/3$ ist das Trägheitsmoment des Stabes).

(a) Freie Schwingungen.

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \left(\frac{c_1}{m} + \frac{c_2}{m}\right)x + \frac{c_1}{m} l\varphi = 0, \\ \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi} + c_1 l x + c_1 l^2 \varphi = 0 \;\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{3c_1}{lm}x + \frac{3c_1}{m}\varphi = 0 \end{aligned}\right\}$$

Wir suchen eine Lösung in der Form $x = A\cos\omega t$, $\varphi = B\cos\omega t$:

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2 A + \left(\frac{c_1}{m} + \frac{c_2}{m}\right)A + \frac{c_1}{m} lB = 0 \\ -\omega^2 B + \frac{3c_1}{lm}A + \frac{3c_1}{m}B = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Charakteristische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \left(\frac{c_1}{m} + \frac{c_2}{m}\right) & \frac{c_1}{m} l \\ \frac{3c_1}{lm} & -\omega^2 + \frac{3c_1}{m} \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\omega^4 - \omega^2\left(\frac{4c_1 + c_2}{m}\right) - \frac{3c_1^2}{m^2} = 0.$$

Betrachten wir den Sonderfall $c_1 = c_2 = c$

$\omega_1^2 \approx 4{,}3\frac{c}{m}$, $\omega_2^2 \approx 0{,}7\frac{c}{m}$.

Die Schwingungsformen erhalten wir aus der Gleichung (9): $B = -\frac{1}{l}\left(2 - \frac{m}{c}\omega^2\right)A$.

$\omega_1 \quad \Rightarrow \quad B = 2{,}3(A/l)$

$\omega_2 \quad \Rightarrow \quad B = -1{,}3(A/l)$.

Die freie Schwingung des Stabes ist im allgemeinen Fall eine Superposition aus zwei Schwingungen mit den Frequenzen ω_1 und ω_2.

(b) Erzwungene Schwingungen

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \left(\frac{c_1}{m} + \frac{c_2}{m}\right)x + \frac{c_1}{m} l\varphi = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t, \\ \ddot{\varphi} + \frac{3c_1}{lm}x + \frac{3c_1}{m}\varphi = \frac{F_0}{ml^2}\cos\Omega t \end{aligned}\right\}$$

Die Lösung wird gesucht in der Form $x = A\cos\Omega t$, $\varphi = B\cos\Omega t$.

$$\left.\begin{aligned} \left(-\Omega^2 + \frac{2c}{m}\right)A + \frac{c_1}{m} lB = \frac{F_0}{m}, \\ +\frac{3c_1}{lm}A + \left(-\Omega^2 + \frac{3c_1}{m}\right)B = \frac{F_0}{ml^2} \end{aligned}\right\}$$