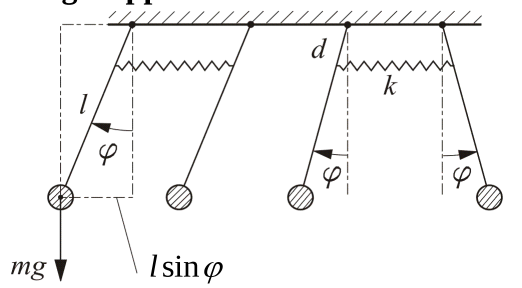
Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 23.

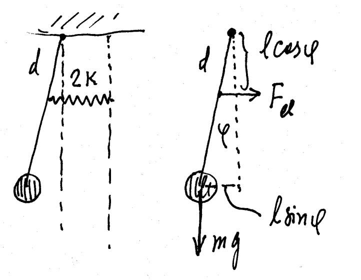
Schwingungen von Systemen mit zwei Freiheitsgraden

Literatur: ***Hauger, Schell und Gross.*** **Technische Mechanik III,** **5.4.1**

I. Zwei gekoppelte Pendel.



In diesem Fall kann man die allgemeine Lösung aufschreiben ohne die Bewegungsgleichungen aufzustellen. Bei kleinen Auslenkungen ist dies ein lineares System. Wenn wir einige "Lösungen" erraten haben,



dann ist auch ihre Superposition mit beliebigen Koeffizienten eine mögliche Bewegung.

Fall (a). Wenn beide Pendel um den gleichen Winkel ausgelenkt werden ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$), so lautet der Drehimpulssatz für jedes Pendel

$\Theta\ddot{\varphi} = ml^2\ddot{\varphi} = M = -mgl\sin\varphi$.

Für kleine Winkel: $\ddot{\varphi} = -(g/l)\varphi$ ist dies die Schwingungsgleichung mit der Frequenz $\omega_1 = \sqrt{g/l}$.

Fall (b). Wenn die Pendel um den gleichen Winkel in entgegengesetzten Richtungen ausgelenkt werden, lautet der Drehimpulssatz:

$\Theta\ddot{\varphi} = ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi - 2kd^2\sin\varphi\cos\varphi$

Bei kleinen Winkeln ersetzen wir $\sin\varphi \simeq \varphi$, $\cos\varphi \simeq 1$: $\ddot{\varphi} = -\left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{2kd^2}{ml^2}\right)\varphi$

Dies ist eine Schwingungsgleichung mit der Frequenz $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{2kd^2}{ml^2}}$.

Bezeichnen wir die Auslenkung des ersten Pendels mit φ_1 und des zweiten mit φ_2. Unsere zwei "Lösungen" (zwei mögliche Schwingungsformen) (a) und (b) lassen sich wie folgt schreiben:

"Lösung 1" (Bewegungsart 1):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1^{(1)} &= A^{(1)}\cos\omega_1 t + B^{(1)}\sin\omega_1 t \\ \varphi_2^{(1)} &= A^{(1)}\cos\omega_1 t + B^{(1)}\sin\omega_1 t \end{aligned}\right\}$$

"Lösung 2" (Bewegungsart 2):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1^{(2)} &= A^{(2)}\cos\omega_2 t + B^{(2)}\sin\omega_2 t \\ \varphi_2^{(2)} &= -A^{(2)}\cos\omega_2 t - B^{(2)}\sin\omega_2 t \end{aligned}\right\}$$

Diese zwei Bewegungsformen nennt man "normale Moden" oder "normale Formen" oder "***Eigenformen***" oder "Hauptschwingungen" des Systems.

Die (Kreis)Frequenzen ω_1 und ω_2 sind ***Eigen(kreis)frequenzen***

"Allgemeine Lösung":

$$\varphi_1 = A^{(1)}\cos\omega_1 t + B^{(1)}\sin\omega_1 t + A^{(2)}\cos\omega_2 t + B^{(2)}\sin\omega_2 t$$

$$\varphi_2 = A^{(1)}\cos\omega_1 t + B^{(1)}\sin\omega_1 t - A^{(2)}\cos\omega_2 t - B^{(2)}\sin\omega_2 t$$

Beispiel. Zu bestimmen ist das Bewegungsgesetz von zwei gekoppelten Pendeln mit den folgenden Anfangsbedingungen:

$\varphi_1(0) = \varphi_0$, $\varphi_2(0) = 0$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$, $\dot{\varphi}_2(0) = 0$.

Aus der allgemeinen Lösung folgt

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(0) &= A^{(1)} + A^{(2)} = \varphi_0 \\ \varphi_2(0) &= A^{(1)} - A^{(2)} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A^{(1)} = A^{(2)} = \varphi_0/2$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varphi}_1(0) &= \omega_1 B^{(1)} + \omega_2 B^{(2)} = 0 \\ \dot{\varphi}_2(0) &= \omega_1 B^{(1)} - \omega_2 B^{(2)} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B^{(1)} = B^{(2)} = 0$$

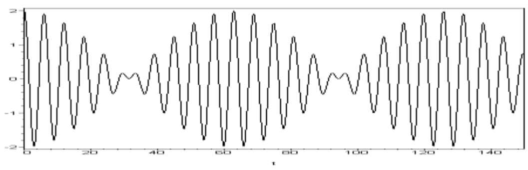
Die Lösung lautet somit

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_0}{2}\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right)$$

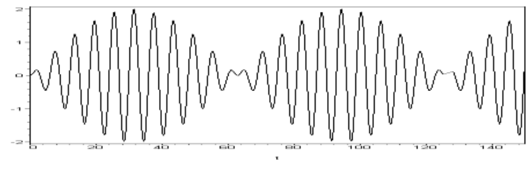
$$\varphi_2(t) = \frac{\varphi_0}{2}\left(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right).$$

Wenn $\omega_1 \approx \omega_2$ ist, so beschreiben beide Gleichungen die *Schwebungen.*

φ_1

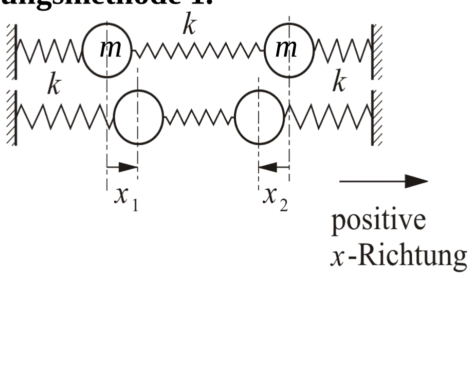


φ_2



t

II. Wie findet man die Eigenformen? Lösungsmethode 1.



Betrachten wir das oben gezeigte Zweimassensystem und stellen für dieses die Bewegungsgleichungen auf:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k(x_2 - x_1) \end{aligned}\right\}$$

Summieren beider Gleichungen ergibt

$$m\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2} = -k(x_1+x_2)$$

Subtrahieren: $m\dfrac{d^2(x_1-x_2)}{dt^2} = -3k(x_1-x_2)$.

Bezeichnungen: $x_1 + x_2 = X$, $x_1 - x_2 = Y$.
Gleichungen A und B nehmen die Form $\boxed{m\dfrac{d^2X}{dt^2} = -kX}$ und $\boxed{m\dfrac{d^2Y}{dt^2} = -3kY}$ an.

Ihre Lösung:

$$X(t) = A^{(1)}\cos\omega_1 t + B^{(1)}\sin\omega_1 t$$
$$Y(t) = A^{(2)}\cos\omega_2 t + B^{(2)}\sin\omega_2 t$$

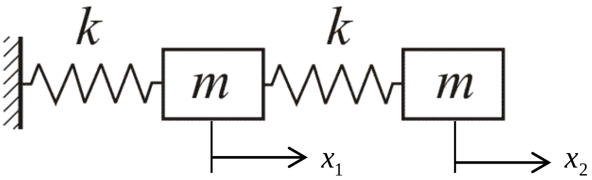
mit $\omega_1^2 = k/m$, $\omega_2^2 = 3k/m$.

Umkehrtransformation:

$$x_1 = \frac{X+Y}{2},\ x_2 = \frac{X-Y}{2}.$$

III. Reguläre Lösungsmethode

Wir betrachten das folgende System:



Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) \end{aligned}\right\}$$

Suchen wir Lösungen in der Form:
$x_1 = X\cos\omega t$, $x_2 = Y\cos\omega t$. Einsetzen in die Bewegungsgleichungen liefert

$$\left.\begin{aligned} -m\omega^2 X &= -kX + k(Y - X) \\ -m\omega^2 Y &= -k(Y - X) \end{aligned}\right\}$$

oder nach Umformung

$$\left.\begin{aligned} \left(2k - m\omega^2\right)X - kY &= 0 \qquad (5) \\ -kX + \left(k - m\omega^2\right)Y &= 0 \qquad (6) \end{aligned}\right\}$$

Bedingung für die Lösbarkeit des Systems:

$$\begin{vmatrix} \left(2k - m\omega^2\right) & -k \\ -k & \left(k - m\omega^2\right) \end{vmatrix} = 0$$ *(charakteristische Gleichung)*

$$m^2\omega^4 - 3km\omega^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega^4 - 3\frac{k}{m}\omega^2 + \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0}$$

<u>Eigenfrequenzen</u>:

$$\left(\omega^2\right)_{1,2} = \frac{3k}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{3k}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2} = \frac{k}{m}\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}. \quad (7)$$

$\boxed{\omega_1 = 1.62\omega_0}$, $\boxed{\omega_2 = 0.62\omega_0}$ mit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

<u>Eigenformen</u> bekommt man, indem man (7) in (5) oder (6) einsetzt: $Y = \left(2 - m\omega^2/k\right)X$.

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}\frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow Y = \left(2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)X = -0.62X$$

$$\omega_2^2 = \frac{k}{m}\frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow Y = \left(2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)X = 1.62X$$

Man kann die Lösungen auch in der Matrixform darstellen:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -0.62 \end{pmatrix}\cos\omega t$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_2 = C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1.62 \end{pmatrix}\cos\omega t$$

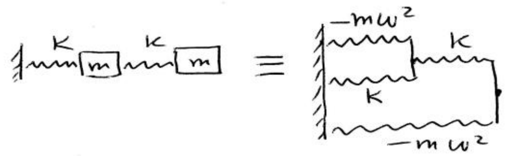
Auf ähnliche Weise kann man zeigen, dass der sin-Ansatz zum gleichen Ergebnis führt. Es gibt zwei weitere unabhängige Lösungen:

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_3 = C_3\begin{pmatrix} 1 \\ -0.62 \end{pmatrix}\sin\omega t$$

$$\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_4 = C_4\begin{pmatrix} 1 \\ 1.62 \end{pmatrix}\sin\omega t$$

Die allgemeine Lösung lautet:
$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_4$. Sie enthält 4 Konstanten, die man aus den vier Anfangsbedingungen bestimmen kann.

IV. Lösung mit komplexen Federzahlen



Die äquivalente, frequenzabhängige Steifigkeit ist gleich

$$k^* = \frac{k(k - m\omega^2)}{2k - m\omega^2} - m\omega^2 = \frac{k^2 - 3km\omega^2 + m^2\omega^4}{2k - m\omega^2}.$$

Eigenfrequenzen sind solche Frequenzen, bei denen die äquivalente, frequenzabhängige Steifigkeit Null wird: $k^2 - 3km\omega^2 + m^2\omega^4 = 0$. Das ist genau die charakteristische Gleichung, die wir oben auf einem anderen Weg erhalten haben.