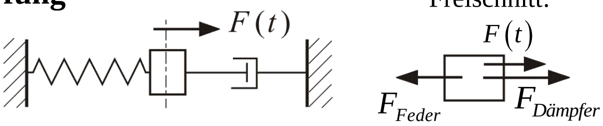
Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung (Fortsetzung)

Literatur: ***Hauger, Schell und Gross.*** **Technische Mechanik III, 5.3.2**

I. Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung



Bewegungsgleichung:

$m\ddot{x} = -cx - d\dot{x} + F(t)$, $\qquad F(t) = F_0 \cos\omega t$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\delta\dot{x} = (F_0/m)\cos\omega t = f_0 \cos\omega t}.$$

Genauso, wie bei freien gedämpften Schwingungen ist es bequem komplexe Zahlen zu benutzen.

II. Lösung von linearen, nicht homogenen Differentialgleichungen

Eine lineare, nicht homogene Gleichung

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + ...a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

ist leicht lösbar im Fall, wenn die Funktion $f(t)$ eine Exponentialfunktion ist:

$f(t) = F_0 e^{pt}$ (p ist eine *beliebige* Konstante).

Allgemeine Lösungsmethode: Suche partikuläre Lösung in der gleichen Exponentialform:

$x = Ce^{pt}$. Einsetzen in die DGL liefert:

$$C\left(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \cdots + a_0\right) = F_0.$$

Daraus folgt

$$C = \frac{F_0}{\left(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \cdots + a_0\right)}.$$

Diese Methode funktioniert auch bei harmonischen Funktionen $f(t)$, da trigonometrische Funktionen über die Eulersche Formel mit der Exponentialfunktion verbunden sind.

III. Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen sind Zahlen der Form

$\boxed{z = x + iy}$.

"i" ist hier die imaginäre Einheit: $i^2 = -1$.

x heißt *Realteil*, y *Imaginärteil* der Zahl:

$x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$.

Die zur z *komplex konjugierte* Zahl ist

$z^* = x - iy$.

Die komplex konjugierte Zahl bekommt man durch Änderung des Vorzeichens vor "i".

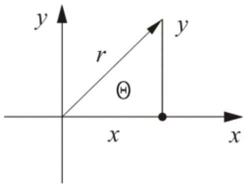
Betrag einer komplexen Zahl: $|z| \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$.

Offenbar gilt

$$z \cdot z^* = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Polare Darstellung von komplexen Zahlen

Eine komplexe Zahl ist eindeutig durch Angabe ihrer Real- und Imaginärteile definiert, d.h. durch die Angabe eines Paars (x,y). Jeder komplexen Zahl kann eindeutig ein Punkt auf der Ebene (x,y) zugeordnet werden (und umgekehrt). Jeder Punkt auf der Ebene kann aber auch eindeutig durch seine Polarkoordinaten



definiert werden:

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Die komplexe Zahl hat dann die Form

$$\boxed{z = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}}.$$

r ist offenbar gleich dem Betrag der komplexen Zahl $|z| \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$. θ heißt *Phase* der komplexen Zahl: $\tan\theta = y/x = \mathrm{Im}(z)/\mathrm{Re}(z)$.

$\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$, $\sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$

Lösungsweg 2 (der beste Weg). $\cos\omega t$ wird als Realteil einer komplexen Exponentialfunkton gesehen.

Beispiel 1. Gegeben sei eine periodische Größe, z.B. Kraft $F(t) = F_0\cos\omega t$.

Sie kann als *Realteil einer komplexen Funktion* $\tilde{F}(t) = F_0 e^{i\omega t}$ betrachtet werden: $F(t) = \mathrm{Re}\,\tilde{F}(t)$.

Beispiel 2. Gegeben sei eine Kosinus-Funktion mit einer Phasenverschiebung:

$$F = F_0\cos(\omega t - \varphi_0) = \mathrm{Re}\left(F_0 e^{i(\omega t - \varphi_0)}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(F_0 e^{-i\varphi_0} \cdot e^{i\omega t}\right) \boxed{= \mathrm{Re}\left(\hat{F} \cdot e^{i\omega t}\right)}$$

$\hat{F}$ ist die *komplexe Amplitude* $\boxed{\hat{F} = F_0 e^{-i\varphi_0}}$

Merke: *Der Koeffizient vor der komplexen Exponentialfunktion kann auch eine komplexe Zahl sein!*

Der Hintergrund der Methode:

Wir betrachten die Gleichung

$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\delta\dot{x} = f(t)$.

Angenommen, eine partikuläre Lösung der Gleichung für $f_1(t) = \cos\omega t$ ist $x_1(t)$ und für $f_2(t) = \sin\omega t$ gerade $x_2(t)$. Die Lösung für $f(t) = af_1(t) + bf_2(t)$ ist dann

$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$.

Insbesondere für die Kraft

$f(t) = f_0\cos\omega t + if_0\sin\omega t = f_0 e^{i\omega t}$

lautet die Lösung $x(t) = f_0 x_1(t) + if_0 x_2(t)$.

D.h.: *Der Realteil der Lösung bei einer komplexen Kraft ist gleich der Lösung unter der Wirkung des Realteils der Kraft.*

<u>Lösungsschritte:</u>

$\boxed{\text{Schritt 1}}$: Wir erkennen eine reelle periodische Kraft $F_0 \cos \omega t$ als Realteil einer komplexen Funktion: $F_0 \cos \omega t = \mathrm{Re}\left(F_0 e^{i\omega t}\right)$

$\boxed{\text{Schritt 2}}$: Die gegebene reelle Kraft ersetzen wir durch die komplexe:
$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\delta \dot{x} = \left(F_0 / m\right) e^{i\omega t}$.

$\boxed{\text{Schritt 3}}$: Exponentialansatz $x = \hat{x} e^{i\omega t}$:
$\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + i2\omega\delta\right) \hat{x} e^{i\omega t} = \left(F_0 / m\right) e^{i\omega t}$

$\boxed{\text{Schritt 4}}$: Komplexe Amplitude:

$$\hat{x} = \frac{\left(F_0 / m\right)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\omega\delta} \qquad (1)$$

Damit ist die Lösung der Ersatzgleichung

$$x(t) = \frac{\left(F_0 / m\right)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\omega\delta} \cdot e^{i\omega t}$$

$\boxed{\text{Schritt 5}}$: Die komplexe Amplitude (1) stellen wir in polarer Form dar: $\hat{x} = \rho \cdot e^{-i\Theta}$ mit

$$\rho^2 = \hat{x}\hat{x}^* = \frac{\left(F_0 / m\right)^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\delta^2},$$

$$\tan\Theta = \frac{-\mathrm{Im}\left(\hat{x}\right)}{\mathrm{Re}\left(\hat{x}\right)} = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

$\boxed{\text{Schritt 6}}$: $x = \mathrm{Re}\left(\hat{x} \cdot e^{i\omega t}\right) =$
$= \mathrm{Re}\left(\rho e^{-i\Theta} \cdot e^{i\omega t}\right) = \rho \cos\left(\omega t - \Theta\right)$

$\boxed{\text{Ergebnis}}$: $\boxed{x(t) = \rho \cos\left(\omega t - \Theta\right)}$

Schwingungsamplitude: $\boxed{\rho = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\delta^2}}}$

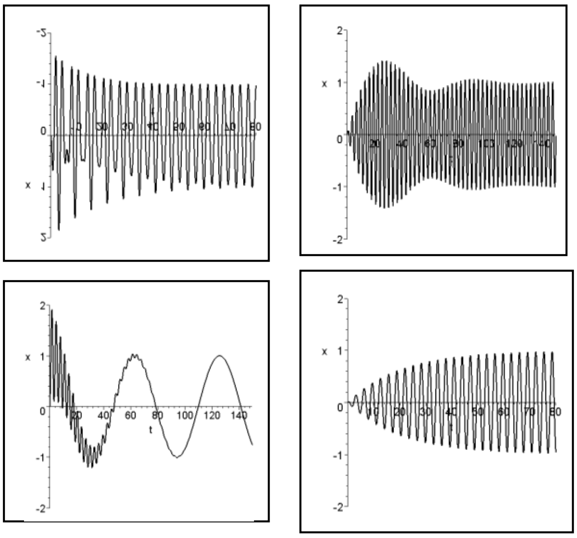
Phasenverschiebung: $\boxed{\Theta = \arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}$

IV. Die allgemeine Lösung setzt sich aus einer partikulären Lösung der nicht homogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung zusammen. Z.B. für kleine Dämpfungen:

$$\boxed{x(t) = \rho \cos\left(\omega t - \Theta\right) + e^{-\delta t}\left(A \cos\omega^* t + B \sin\omega^* t\right)}$$

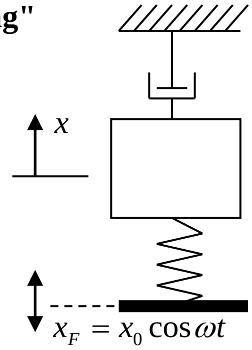
Nach einer ausreichend langer Zeit wird das zweite Glied abklingen. Dann wird die Lösung nur durch die partikulare Lösung der nicht homogenen Gleichung bestimmt.

Beispiele für Übergangsprozesse (*Einschwingvorgang*):



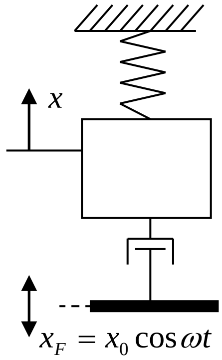
V. Beispiele für erzwungene Schwingungen

Beispiel: "Fußpunkterregung"



Bewegungsgleichung:
$m\ddot{x} = -c\left(x - x_F\right) - d\dot{x}$,
$m\ddot{x} + cx + d\dot{x} = cx_F$
$m\ddot{x} + cx + d\dot{x} = cx_0 \cos\omega t$,
d.h. identisch mit dem Fall einer Erregung durch eine Kraft $F(t) = cx_0 \cos\omega t$.

Beispiel: Erregung über einen Dämpfer

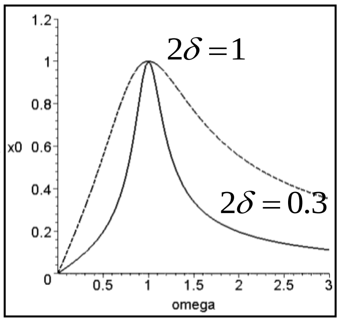


Bewegungsgleichung:
$m\ddot{x} + cx + d\dot{x} = d\dot{x}_F$,
$m\ddot{x} + cx + d\dot{x} = -d\omega x_0 \sin\omega t$,
d.h. identisch mit dem Fall einer Erregung durch eine Kraft $F(t) = -d\omega x_0 \sin\omega t$.
Zu berechnen ist die Schwingungsamplitude.
<u>Lösung</u>
$F(t) = \mathrm{Im}(-d\omega x_0 e^{i\omega t})$

$$\hat{x} = \frac{-2\delta\omega x_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\omega\delta}.$$

Schwingungsamplitude:

$$\rho = \frac{2\omega\delta x_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\delta^2}}.$$



Vergrößerungsfunktion:

$$V = \frac{2\omega\delta}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\delta^2}}$$