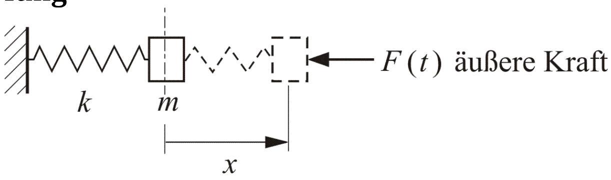
Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 21.

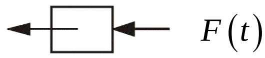
Erzwungene Schwingungen, Resonanz

Literatur: *Hauger, Schell und Gross.* Technische Mechanik III, 5.3.1

I. Erzwungene Schwingungen ohne Dämpfung



Freischnitt: $F_{el} = -cx$



Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} = -cx + F(t)$

Angenommen die äußere Kraft ändert sich nach dem Gesetz $F(t) = F_0 \cos \omega t \;\Rightarrow$

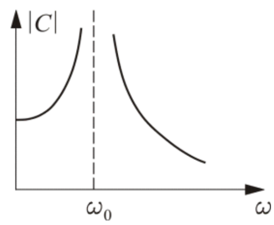
Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} = -cx + F_0 \cos \omega t$

Lösungsansatz: $x = C \cos \omega t$. Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert

$$-m\omega^2 C \cancel{\cos \omega t} = -cC \cancel{\cos \omega t} + F_0 \cancel{\cos \omega t}$$

$$C\left(c - m\omega^2\right) = F_0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{C = \frac{F_0}{c - m\omega^2} = \frac{F_0/m}{c/m - \omega^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$



Die Lösung: $\boxed{x = \dfrac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t}$ (1)

heißt *Partikularlösung* der DGL. Aus (1) folgt:

- wenn $\omega < \omega_0$, hat x dasselbe Vorzeichnen wie F. Koordinate und Kraft schwingen in gleicher Phase.
- wenn $\omega > \omega_0$, hat x entgegengesetztes zu F Vorzeichnen $\Rightarrow$ Die Koordinate schwingt in „Gegenphase“ zur Kraft.
- Amplitude wird ∞, wenn $\omega \to \omega_0$ - RESONANZ.

Die <u>Allgemeine Lösung</u> setzt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer Partikularlösung zusammen:

$$\boxed{x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t} \quad (2)$$

Beispiel: Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich die Masse in Ruhe im Gleichgewicht: (Anfangsbedingungen: $x(0) = 0$, $v(0) = 0$).

Zu bestimmen ist ihre Bewegung unter der Wirkung der Kraft $F(t) = F_0 \cos \omega t$.

<u>Lösung:</u> Aus (2) folgt

$$x(0) = A + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0$$

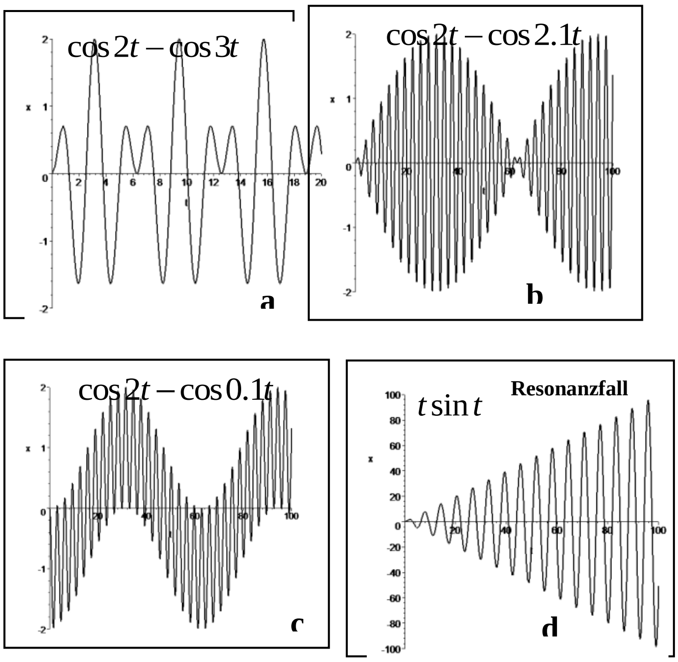
$$\dot{x}(0) = \left[-A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t - \omega \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \right]\Bigg|_{t=0} =$$

$$= B\omega_0 = 0$$

Daraus folgt: $B = 0$, $A = -\dfrac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

Die Lösung lautet

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -\frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega_0 t + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t = \\ &= \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\cos \omega t - \cos \omega_0 t \right) \end{aligned}} \quad (3)$$



<u>Sonderfall</u> $\omega = \omega_0$ **(Resonanz)**. In (3) setzen wir $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ ein und lassen $\Delta\omega \to 0$.

$$x = \frac{F_0/m}{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)} \left(\cos(\omega_0 + \Delta\omega)t - \cos \omega_0 t \right) =$$

$$= -\frac{F_0}{m} \frac{t}{(\omega_0 + \omega)} \frac{\left(\cos(\omega_0 t + \Delta\omega \cdot t) - \cos \omega_0 t \right)}{\Delta\omega \cdot t} =$$

$$= \frac{F_0}{m} \frac{t}{(\omega_0 + \omega)} \sin \omega_0 t \to \frac{F_0}{m} \frac{t}{2\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$\boxed{x = \dfrac{F_0 t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t \text{ (Resonanzfall) } \textbf{Bild d} \text{ oben).}}$

II. Schwebungen. Oft werden Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen überlagert. Erzwungene Schwingung ohne Dämpfung ist ein Beispiel hierfür: $x(t)=C\left(\cos\omega t-\cos\omega_0 t\right)$.

Wir untersuchen den Fall, wo die beiden Frequenzen fast gleich sind: $\omega=\omega_0+\Delta\omega$ ($\Delta\omega$ ist eine kleine Frequenzdifferenz $\Delta\omega \ll \omega_0,\omega$).

Es gilt $\omega=\bar\omega+\left(\Delta\omega/2\right)$, $\omega_0=\bar\omega-\left(\Delta\omega/2\right)$,

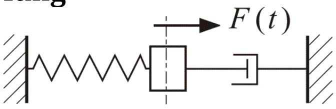
wobei $\bar\omega=\dfrac{\omega+\omega_0}{2}$ der Mittelwert der beiden Frequenzen ist. Für den uns interessierenden Ausdruck $\cos\omega t-\cos\omega_0 t$ ergibt sich

$$\cos\omega t-\cos\omega_0 t=$$
$$=\cos\left(\bar\omega+\left(\Delta\omega/2\right)\right)t-\cos\left(\bar\omega-\left(\Delta\omega/2\right)\right)t=$$
$$\cancel{\cos\bar\omega t\cdot\cos\left(\Delta\omega/2\right)t}+\sin\bar\omega t\cdot\sin\left(\Delta\omega/2\right)t+$$
$$\cancel{-\cos\bar\omega t\cdot\cos\left(\Delta\omega/2\right)t}+\sin\bar\omega t\cdot\sin\left(\Delta\omega/2\right)t=$$
$$\cos\omega t-\cos\omega_0 t=2\boxed{\sin\bar\omega t}\cdot\boxed{\sin\left(\Delta\omega/2\right)t}.$$

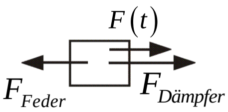
Schnelle Schwingungen | langsam oszillierende Amplitude

Diese Art von Schwingung heißt ***Schwebung*** (Bild b oben)

III. Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung



Freischnitt:



Bewegungsgleichung:

$$m\ddot x=-cx-d\dot x+F\left(t\right),\qquad F\left(t\right)=F_0\cos\omega t$$

$$\boxed{\ddot x+\omega_0^2 x+2\delta\dot x=\left(F_0/m\right)\cos\omega t}.$$

Dies ist eine lineare, nicht homogene DGL.

Trigonometrische Funktionen und imaginäre Exponenten

$$\begin{cases} e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha \\ e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha \end{cases}$$
$$e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}=2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})/2,$$
$$e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}=2i\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha=(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})/2.$$

Partikularlösung

Wir stellen $\cos\omega t$ als Summe von Exponentialfunktionen dar: $\cos\omega t=(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})/2$ und lösen dann die Gleichung

$$\ddot x+\omega_0^2 x+2\delta\dot x=\left(f_0/2\right)(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}).$$

Wegen der Linearität können wir die Aufgabe in getrennte Lösungen von zwei Aufgaben teilen

$$\ddot x_1+\omega_0^2 x_1+2\delta\dot x_1=\left(f_0/2\right)e^{i\omega t}\quad\text{und}$$
$$\ddot x_2+\omega_0^2 x_2+2\delta\dot x_2=\left(f_0/2\right)e^{-i\omega t}.$$

Diese Gleichungen lösen wir mit dem Exponentialansatz: $x_1(t)=\tilde x_1 e^{i\omega t}$, $x_2(t)=\tilde x_2 e^{-i\omega t}$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} -\omega^2\tilde x_2+\omega_0^2\tilde x_2+i2\omega\delta\tilde x_2=\left(f_0/2\right) \\ -\omega^2\tilde x_2+\omega_0^2\tilde x_2-i2\omega\delta\tilde x_2=\left(f_0/2\right) \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\tilde x_1=\frac{\left(f_0/2\right)}{-\omega^2+\omega_0^2+i2\omega\delta},\quad \tilde x_2=\frac{\left(f_0/2\right)}{-\omega^2+\omega_0^2-i2\omega\delta}.$$

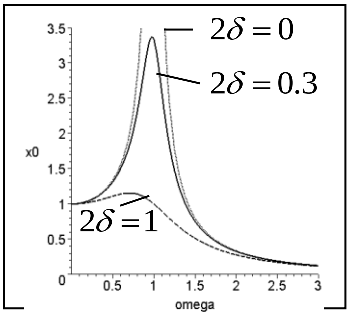
Die partikuläre Lösung ist:

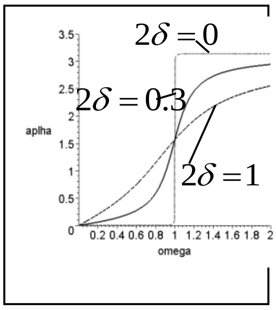
$$x(t)=\frac{\left(f_0/2\right)}{-\omega^2+\omega_0^2+i2\omega\delta}e^{i\omega t}+\frac{\left(f_0/2\right)}{-\omega^2+\omega_0^2-i2\omega\delta}e^{-i\omega t}=$$
$$\frac{\left(f_0/2\right)}{\left(-\omega^2+\omega_0^2\right)^2+4\omega^2\delta^2}\begin{bmatrix}\left(-\omega^2+\omega_0^2-i2\omega\delta\right)e^{i\omega t}+ \\ +\left(-\omega^2+\omega_0^2+i2\omega\delta\right)e^{-i\omega t}\end{bmatrix}=$$
$$\frac{f_0}{\left(-\omega^2+\omega_0^2\right)^2+4\omega^2\delta^2}\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\omega t+2\omega\delta\sin\omega t\right]=$$
$$=x_0\cos\left(\omega t-\alpha\right)$$

Dies ist eine harmonische Schwingung mit der Amplitude $\boxed{x_0=\dfrac{f_0}{\sqrt{\left(-\omega^2+\omega_0^2\right)^2+4\omega^2\delta^2}}}$

und der *Phasenverschiebung* α:

$$\boxed{\tan\alpha=\frac{2\omega\delta}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}}.$$





Das Verhältnis

$$V=\frac{x_0(\omega)}{x_0(0)}=\frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(-\omega^2+\omega_0^2\right)^2+4\omega^2\delta^2}}$$

heißt *Vergrößerungsfunktion*. Sie zeigt, um wie viel größer die Schwingungsamplitude verglichen mit dem statischen Fall ist. Der maximale Wert der Vergrößerungsfunktion:

$V_{\max}=\dfrac{x_0(\omega_0)}{x_0(0)}=\dfrac{\omega_0}{2\delta}\equiv Q$ heißt die *Güteziffer* des Schwingers.