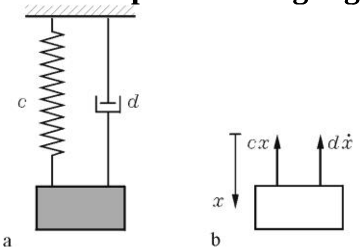
Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 20.
**Gedämpfte Schwingungen**
**Literatur:** ***Hauger, Schell und Gross.*** **Technische Mechanik III,** 5.2.3

## I. Gedämpfte Schwingungen




Bewegungsgleichung (das 2. N.G.):

$$m\ddot{x} = -d\dot{x} - cx$$

Federkraft

Dämpfungskraft (viskose Reibung)

Standardform: $\ddot{x} + \underbrace{\frac{d}{m}}_{2\delta}\dot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{\omega_0^2}x = 0$

$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ - die Bewegungsgleichung für freie Schwingungen eines gedämpften Einmassenschwingers.

## II. Lösung mit dem Exponentialansatz

Gegeben sei die DGL $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

<u>Lösung:</u> Ansatz $x = Ae^{\lambda t} \Rightarrow$

Die Charakteristische Gl. $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$

hat zwei Wurzeln $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ .

Die Allgemeine Lösung ist $x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

**<u>Drei Fälle:</u>**

$\boxed{\text{A.}}$ ***Kleine Dämpfung*** $\delta^2 < \omega_0^2$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{-\left(\omega_0^2 - \delta^2\right)} =$$

$$= -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega^*$$

$$\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2};$$

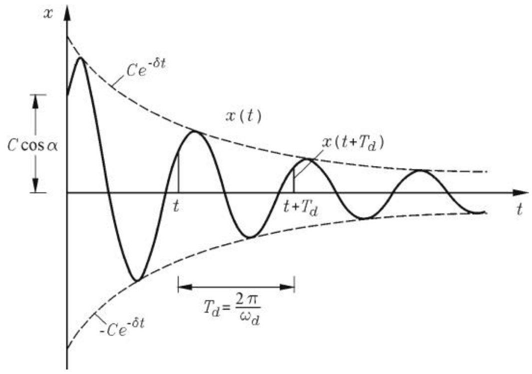
$$x = C_1 e^{(-\delta + i\omega^*)t} + C_2 e^{(-\delta - i\omega^*)t} =$$

$$= C_1 \cdot e^{-\delta t} \cdot e^{i\omega^* t} + C_2 \cdot e^{-\delta t} \cdot e^{-i\omega^* t} =$$

$$= e^{-\delta t}\left(A\cos\omega^* t + B\sin\omega^* t\right)$$

$$= Ce^{-\delta t}\cos\left(\omega^* t + \alpha\right)$$

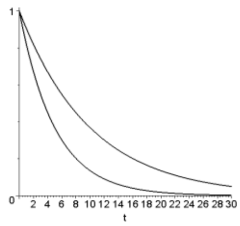
Das ist eine Schwingung mit der Kreisfrequenz $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ und einer nach dem Gesetz $e^{-\delta t}$ abnehmenden Amplitude. $\delta$ heißt Abklingkoeffizient [ $s^{-1}$ ]. Die "Periode" (z.B. Zeit zwischen zwei Maxima) $T = 2\pi / \omega^* = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ strebt bei $\delta \to \omega_0$ gegen $\infty$ .




$\boxed{\text{B.}}$ ***Große Dämpfung*** $\delta^2 > \omega_0^2$

Beide $\lambda_{1,2}$ sind reell (und negativ)

$$x = Ae^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} + Be^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t}$$




Zwei Exponenten

<u>Anfangsbedingungen:</u>

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

$$x(0) = Ae^{\lambda_1 0} + Be^{\lambda_2 0} = A + B = x_0$$

$$\dot{x}(t) = A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

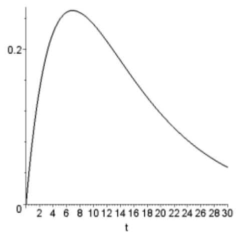
$$\dot{x}(0) = A\lambda_1 + B\lambda_2 = v_0$$

$$A = \frac{\lambda_2 x_0 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad B = \frac{v_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

$$x(t) = \frac{\lambda_2 x_0 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{\lambda_1 t} + \frac{v_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{\lambda_2 t}$$

z. B. für $x_0 = 0$, $v_0 \neq 0$

$$x(t) = \frac{v_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}\right) = \frac{v_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-|\lambda_2|t} - e^{-|\lambda_1|t}\right)$$




„Übergedämpfte Schwingungen“

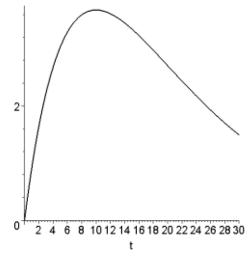
$\boxed{\text{C}}$ ***Aperiodischer Grenzfall*** $\delta = \omega_0$ ,

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\delta$ .

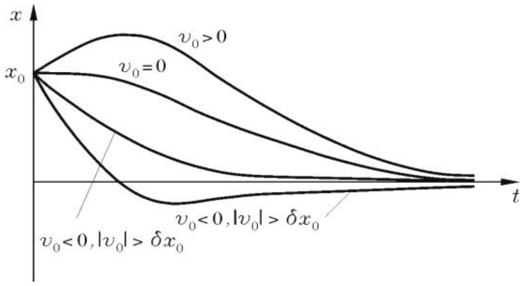
In der letzten Gleichung des Abschnitts B setzen wir $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ und lassen $\Delta\lambda$ gegen Null streben:

$$x(t)=\frac{v_0}{\delta}\cdot\left(e^{(\lambda_1 t+\Delta\lambda\cdot t)}-e^{\lambda_1 t}\right)=$$
$$=v_0 t\,\frac{e^{\lambda_1 t+\Delta\lambda\cdot t}-e^{\lambda_1 t}}{\Delta\lambda\cdot t}=$$

$$\boxed{x=v_0 t e^{\lambda_1 t}=v_0 t e^{-|\lambda| t}}$$




Die allgemeine Lösung ist in diesem Fall
$x(t)=Ae^{-\delta t}+Bte^{-\delta t}=x_0e^{-\delta t}+(v_0+x_0\delta)te^{-\delta t}$.
Abhängig von den Anfangsbedingungen können sich folgende Bewegungen ergeben:




**III. Energie bei nicht gedämpften und gedämpften Schwingungen**

Für ungedämpfte Schwingungen gilt

$$\underbrace{E=T+U}_{Energie}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}cx^2=\frac{1}{2}m\omega_0^2C^2\sin^2(\omega_0 t-\alpha)$$
$$+\frac{1}{2}cC^2\cos^2(\omega_0 t-\alpha)=\frac{cC^2}{2}=const$$

Die Energie bleibt erhalten. Der Mittelwert der kinetischen Energie ist dabei gleich dem Mittewert der potentiellen Energie:
$\langle K\rangle=\langle U\rangle=E/2$

Für gedämpfte Schwingungen multiplizieren wir $m\ddot{x}+d\dot{x}+cx=0$ mit $\dot{x}$:

$$m\ddot{x}\dot{x}+d(\dot{x})^2+cx\dot{x}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{2}\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{cx^2}{2}\right)=-d\cdot\dot{x}^2=-\frac{2d}{m}\frac{m\dot{x}^2}{2}$$

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{2d}{m}K=-4\delta K\,.$$

Mittelung über eine Periode ergibt:

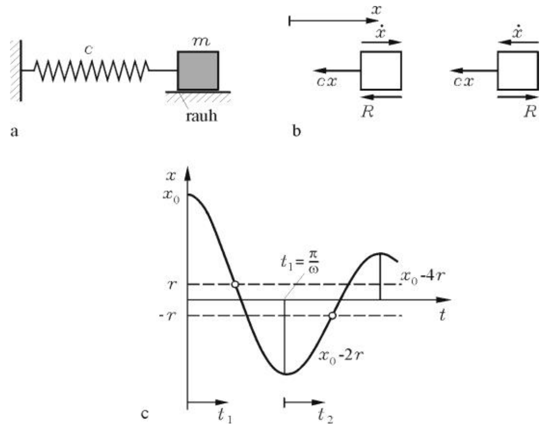
$$\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle=-4\delta\langle K\rangle=-2\delta\langle E\rangle.$$

Die Energie nimmt somit nach dem Gesetz

$\langle E\rangle=\langle E_0\rangle e^{-2\delta t}$ ab.

**IV. Schwingungen in Anwesenheit trockener Reibung**

Ein Klotz (Masse *m*) bewege sich auf einer Unterlage (Reibungskoeffizient $\mu$). Die Rei-




bungskraft $R=\mu mg$ ist stets gegen die Geschwindigkeit gerichtet. Das 2. N.G. liefert:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-cx-R, & \dot{x}>0\\ m\ddot{x}=-cx+R, & \dot{x}<0\end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}=-\omega_0^2x-r, & \dot{x}>0\\ \ddot{x}=-\omega_0^2x+r, & \dot{x}<0\end{cases}\qquad r=R/m$$

Bei den Anfangsbedingungen
$x(t_1=0)=x_0,\quad \dot{x}(t_1=0)=0$

bewegt sich der Klotz nach links $(\dot{x}<0)$,

$\ddot{x}+\omega_0^2x=r$;

$x=r/\omega_0^2$ ist eine *Partikularlösung* der *nicht homogenen* Gleichung.
Die *allgemeine* Lösung ist
$x=A\cos\omega_0t+B\sin\omega_0t+r/\omega_0^2$;
Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$$\begin{cases} x(0)=A+r/\omega_0^2=x_0\\ \dot{x}(0)=\omega_0B=0\end{cases}$$

ergibt $B=0$ und $A=x_0-r/\omega_0^2$.
Die endgültige Lösung ist:
$x=(x_0-r/\omega_0^2)\cos\omega_0t+r/\omega_0^2$;
Diese Lösung gilt solange
$\dot{x}=-\omega_0(x_0-r/\omega_0^2)\sin\omega_0t<0$
Die Geschwindigkeit würde ihr Vorzeichen ändern, wenn $\sin\omega_0t=0$. Das geschieht zum Zeitpunkt $t_1=\pi/\omega_0$. In diesem Moment ist
$x=-(x_0-r/\omega_0^2)+r/\omega_0^2=-x_0+2r/\omega_0^2$
D.h. nach einer halben Periode hat der Ausschlag um $2r/\omega_0^2$ abgenommen. In der nächsten halben Periode wird offenbar dasselbe passieren. Nach einer endlichen Zahl von Halbperioden kommt der Körper vollständig zum Stillstand.