Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 1.

Kinematik einer eindimensionalen Bewegung: Geschwindigkeit als Ableitung, Entfernung als Integral, Beschleunigung. **Literatur:** ***Hauger, Schnell und Gross.*** **Technische Mechanik III, 1.1.1.-1.1.3.**

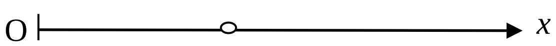
I. Kinematik und Dynamik. Unter der *Kinematik* versteht man rein mathematische und geometrische Methoden zur Beschreibung von Bewegungen, wie Koordinaten, Vektoren, geometrische Bindungen ect.

Das Wort *Dynamik*, oder Englisch *dynamics*, wird in allen Wissenschaftszweigen als Synonym zur Bewegung verstanden. An einigen deutschsprachigen Technischen Universitäten ist für die Dynamik auch ein anderes Wort gebräuchlich: "die Kinetik". Im Sinne unserer Vorlesung sind "die Dynamik" und "die Kinetik" Synonyme.

Alle Fragen über die Ursachen und den Charakter von Bewegungen werden in der klassischen Mechanik ganz einheitlich beantwortet: Gemäß den Newtonschen Gesetzen. Die Newtonschen Gesetze und deren Anwendung in verschiedenen Situationen sind das Hauptthema der Veranstaltung Kinematik und Dynamik.

II. Massenpunkt. Der Begriff eines Massenpunktes ist einer der Grundbegriffe der Mechanik. Unter einem Massenpunkt versteht man einen Körper, dessen Ausmaße man bei der Beschreibung seiner Bewegung vernachlässigen kann. Natürlich hängt die Möglichkeit einer solchen Vernachlässigung von den konkreten Bedingungen der Aufgabe ab. So kann man z.B. die Planeten als Massenpunkte annehmen, wenn man ihre Bewegung um die Sonne untersucht, dagegen freilich nicht, wenn man ihre tägliche Drehung betrachtet.

III. Eindimensionale Bewegung. Wir beginnen mit der Bewegung in einer Richtung, wie in einem Wagen auf einer geraden Straße. Um Koordinaten angeben zu können, müssen wir ein Koordinatensystem wählen. Bei einer eindimensionalen Bewegung reicht die Angabe einer Koordinatenachse x, die in die Bewegungsrichtung zeigt:



Wir wählen auf dieser Achse einen Koordinatenursprung. Zu jedem Zeitpunkt befindet sich der Wagen in einem bestimmten Punkt dieser Achse. Diesen Sachverhalt merken wir uns, indem wir schreiben: $x = x(t)$.

IV. Geschwindigkeit als Ableitung.
Die mittlere *Geschwindigkeit* auf dem Zeitintervall (t_1, t_2) wird als Verhältnis des zurückgelegten Weges zu der verstrichenen Zeit definiert:

$$v = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Die *momentane Geschwindigkeit* ist Grenzwert dieses Verhältnisses für $t_2 - t_1 \to 0$:

$$v(t_1) = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Das ist nichts anderes als die erste Ableitung der Koordinate nach der Zeit:

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

In der Mechanik ist es üblich die Ableitung nach der Zeit durch einen Punkt über dem Buchstaben zu bezeichnen:

$$v = \dot{x}.$$

Nützliche Regeln der Differenzial- und Integralrechnung

Funktion $x(t)$	Ableitung $\frac{dx}{dt}$	Funktion $g(t)$	Stammfunktion (unbestimmtes Integral) $G(t) = \int g(t)\mathrm{d}t$
C	0	0	C
t	1	1	$t + C$
$u(t) + f(t)$	$\frac{du}{dt} + \frac{df}{dt}$	$u(t) + v(t)$	$\int u\mathrm{d}t + \int v\mathrm{d}t + C$
$u(t) \cdot f(t)$	$\frac{du}{dt} f + u\frac{df}{dt}$	partielle Integration $\int \frac{du}{dt} f\mathrm{d}t + \int u\frac{df}{dt}\mathrm{d}t = uv + C$	
t^2	$2t$	t	$t^2/2 + C$
t^3	$3t^2$	t^2	$t^3/3 + C$
t^n	nt^{n-1}	t^n	$t^{n+1}/(n+1) + C$
$u = u(f)$, $f = f(t)$	$\frac{du}{dt} = \frac{du}{df} \cdot \frac{df}{dt}$	Substitionsmethode	
$\sin t$	$\cos t$	$\cos t$	$\sin t + C$
$\cos t$	$-\sin t$	$\sin t$	$-\cos t$
e^t	e^t	e^t	$e^t + C$
$\ln t$	$1/t$	$1/t$	$\ln t + C$
$\arcsin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\arcsin t$

V. Entfernung als Integral.

Ist die Geschwindigkeit $v(t)$ als Funktion der Zeit bekannt, so kann die Koordinate zu einem beliebigen Zeitpunkt bestimmt werden. Zwei Lösungsmöglichkeiten:

1. Unbestimmte Integration. Die Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung der Koordinate: $\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$. Die Koordinate zu bestimmen bedeutet demnach eine Funktion zu finden, deren Ableitung der gegebenen Funktion $v(t)$ gleich ist. Diese Funktion nennt man *Stammfunktion* oder *unbestimmtes Integral* der Funktion $v(t)$. Bezeichnung:

$$x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t + C .$$

Die Integration ist offenbar eine Umkehroperation zur Ableitung. Die Tabelle der Ableitungen - gelesen in der umgekehrten Richtung - ist gleichzeitig eine Tabelle der Integrale (s. Tabelle).

2. Bestimmte Integration. In einem kurzen Zeitabschnitt Δt ändert sich die Koordinate des Wagens um $\Delta x = v \cdot \Delta t$. Die gesamte Änderung der Koordinate auf einem längeren Zeitintervall kann man als Summe $x(t_2) - x(t_1) \approx \sum_i v(t_i)\Delta t$ berechnen. Jedoch ist die mit dieser Methode erhaltene Koordinate nicht ganz genau, weil sich die Geschwindigkeit während des Zeitintervalls Δt ändert. Wenn wir die Zeit klein genug wählen, so ist die Summe präzise:

$$x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i v(t_i)\Delta t$$

Den Grenzwert nennt man *bestimmtes Integral:*

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$$

Die Bezeichnung des Integrals erinnert an seine Herkunft: Das Δ wird zu d, um uns daran zu erinnern, dass die Zeit so gering ist, wie möglich, und die Addition wird als eine Summe mit einem großen "S" geschrieben, das sich im Laufe der Zeit etwas ausgestreckt hat: $\int$. Bestimmte Integrale berechnet man mit dem *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:* Ist $G(t)$ eine Stammfunktion von $g(t)$, so gilt:

$$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = G(b) - G(a) .$$

VI. Beschleunigung

Ändert sich die Geschwindigkeit mit der Zeit: $v = v(t)$, so sprechen wir von einer beschleunigten Bewegung. *Die Beschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit*:

$$a = \frac{dv}{dt} .$$

Da die Geschwindigkeit selbst die Ableitung der Koordinate nach der Zeit ist, ist die Beschleunigung eine Ableitung der Ableitung oder, wie man sagt, die zweite Ableitung der Koordinate nach der Zeit. Dies wird in einer der folgenden Formen geschrieben:

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} .$$

Ist die Abhängigkeit der Koordinate von der Zeit bekannt, so kann man alle sonstigen wichtigen kinematischen Größen sofort berechnen: Nach einmaliger Ableitung haben wir die Geschwindigkeit, nach der zweiten Ableitung die Beschleunigung.

VII. Kinematische Grundaufgaben.

1. $a = 0$. Das bedeutet: $a = \dot{v} = dv/dt = 0$. Erste Integration: $v = \mathrm{const} = v_o$ (*gleichförmige Bewegung*). Aus der Definition $v = dx/dt$ erhalten wir nach der zweiten Integration $x = v_0 t + C$. Die Integrationskonstante erhält man mit Hilfe der *Anfangsbedingung:*

$$x_0 = v_0 t_0 + C \;\Rightarrow\; x = x_0 + v_0\left(t - t_0\right) .$$

2. $a = a_0$ (*gleichmäßig beschleunigte Bewegung*) $\Rightarrow$ Zweifache Integration

3. $a = a(t)$ $\Rightarrow$ Zweifache Integration

4. $a = a(v)$. Wir schreiben die Beschleunigung als zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit: $\frac{dv}{dt} = a(v)$ und trennen die Variablen: $\frac{dv}{a(v)} = dt$**.** Integration $\int \frac{dv}{a(v)} = t + C$ ergibt nun einen Zusammenhang zwischen der Zeit und der Geschwindigkeit. Zur Berechnung der Koordinate integriert man die Geschwindigkeit nach der Zeit.

5. $a = a(x)$ Lösung durch Multiplikation mit v und Darstellung in der Form $v\mathrm{d}v = a(x)\mathrm{d}x$.