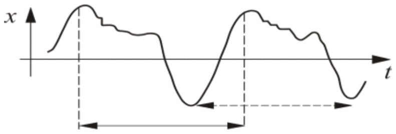
Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 19.
Schwingungen, Federzahlen, imaginäre Exponenten
Literatur: *Hauger, Schell und Gross.* Technische Mechanik III, 5.1, 5.2.1, 5.2.2

Beispiele für Schwingungen

- Masse an einer Feder
- Schwingungen in elektrischen Kreisen
- Elektronen in einem Atom
- Regelungssysteme
- Ökologische Systeme
- Wirtschaftliche Systeme
- ......

I. Periodische Schwingungen:



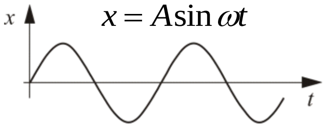
$$x(t+T)=x(t)$$

T - Periode

$f=\dfrac{1}{T}$ - Frequenz (Einheit *Hertz*: Hz=1/s)

I.a. Harmonische Schwingungen

$x = A\sin\omega t$ $\qquad \omega$ – Kreisfrequenz



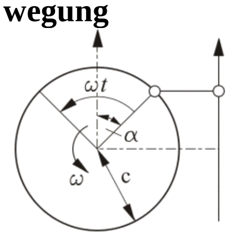
$$x(\omega t+2\pi)=x(\omega t);\quad x\left(\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)\right)=x(\omega t)$$

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega};\quad \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f}$$

Allgemeine Form von harmonischen Schwingungen:

$$x(t)=C\cos(\omega t-\alpha)=$$
$$=C\cos\omega t\cos\alpha+C\sin\omega t\cdot\sin\alpha=$$
$$=A\cos\omega t+B\sin\omega t\,;$$
$$A=C\cos\alpha\,,\quad B=C\sin\alpha\,;$$
$$C=\sqrt{A^2+B^2}\,,\quad \alpha=\arctan\frac{B}{A}\,.$$

II. Harmonische Schwingung und Kreisbewegung



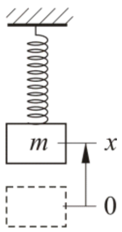
$x=C\cos(\omega t-\alpha)$

$\varphi=\omega t-\alpha$ – Phasenwinkel (oder Phase)

Kreisfrequenz und Winkelgeschwindigkeit sind in diesem Fall Synonyme.

III. Einmassenschwinger.

Betrachten wir eine Masse gekoppelt an eine starre Wand mit einer linear elastischen Feder. Betrachten wir dieses System zunächst unter Vernachlässigung der Schwerekraft. Das zweite Newtonsche Gesetz lautet:



$$m\ddot{x}=-cx \quad\text{oder}\quad \ddot{x}=-\left(\frac{c}{m}\right)x=-\omega_0^2x\,.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$x(t)=A\cos\omega_0t+B\sin\omega_0t$$

Die Konstanten A und B berechnen sich mit Hilfe von Anfangsbedingungen:

$x(0)=x_0\,,\quad \dot{x}(0)=v_0$. Daraus folgt

$A=x_0\,,\quad B=v_0/\omega_0\,.$

Die Lösung lautet somit

$$x(t)=x_0\cos\omega_0t+\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0t\,.$$

Die Amplitude der Schwingung ist gleich

$$C=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega_0)^2}\,,$$

die Phase $\alpha=\arctan\dfrac{v_0}{\omega_0x_0}$.

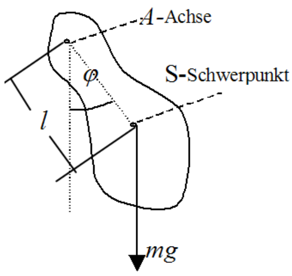
$\omega_0=\sqrt{c/m}$ wird *Eigenkreisfrequenz* genannt.

Kinetische und potentielle Energie oszillieren, wobei ihre Summe konstant bleibt:

$$\underbrace{E=T+U}_{Energie}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}cx^2=\frac{1}{2}m\omega_0^2C^2\sin^2(\omega_0t-\alpha)$$
$$+\frac{1}{2}cC^2\cos^2(\omega_0t-\alpha)=\frac{cC^2}{2}=const$$

IV. Physikalisches Pendel.

IV. Physikalisches Pendel. Betrachtet wird ein beliebiger starrer Körper, der eine ebene Bewegung um eine feste Achse A ausführt.



Der Drehimpulssatz bezüglich der Rotationsachse lautet:

$$\Theta_A\ddot{\varphi}=-mgl\sin\varphi\,.$$

Für kleine φ vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\Theta_A\ddot{\varphi}=-mgl\varphi \quad\text{oder}\quad \ddot{\varphi}+\omega^2\varphi=0 \quad\text{mit}$$
$$\omega^2=mgl/\Theta_A\,.$$

Für den Sonderfall eines mathematischen Pendels erhalten wir

$$\omega^2=mgl/\Theta_A=mgl/ml^2=g/l\,.$$

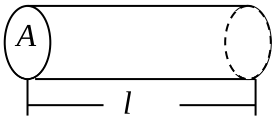
V. Federzahlen elastischer Systeme

Bei einer linear elastischen Feder gilt $F=c\Delta l$. Der Steifigkeitskoeffizient kann somit definiert werden als $c=F/\Delta l$.

Dehnfedern

Elastizitätsmodul E

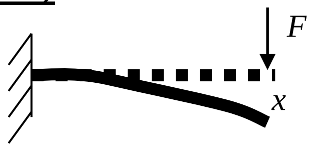
$$\sigma = E\varepsilon$$



$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta l}{l} \;\Rightarrow\; F = \frac{AE}{l}\Delta l \;\Rightarrow\; \boxed{c = \frac{AE}{l}}.$$

Biegefedern (Blattfedern)

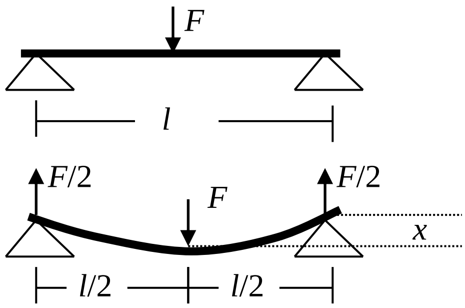
Elastizitätsmodul E, geometrisches Trägheitsmoment des Querschnitts ist I.



Aus der Statik ist bekannt, dass die Verschiebung des Endpunktes des Balkens ist gleich

$$x = \frac{Fl^3}{3EI} \;\Rightarrow\; F = \frac{3EI}{l^3}x \;\Rightarrow\; \boxed{c = \frac{3EI}{l^3}}$$

Eine auf beiden Enden gestützte Blattfeder



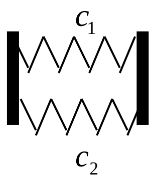
In diesem Fall ist Verschiebung wie bei einem einseitig eingespannten Balken der Länge $l/2$ unter der Wirkung einer Kraft $F/2$:

$$x = \frac{F}{2}\frac{(l/2)^3}{3EI} = \frac{Fl^3}{48EI} \;\Rightarrow\; \boxed{c = \frac{48EI}{l^3}}.$$

VI. Parallelschaltung von Federn

Gesamtsteifigkeit

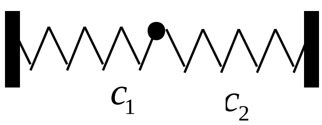
$$c^* = c_1 + c_2$$



VII. Reihenschaltung von Federn

Gesamtsteifigkeit

$$\frac{1}{c^*} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$$



VIII. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

A. Homogene Gleichungen

$$a_n\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + ...a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

Allgemeiner Lösungsansatz:

$$x = Ce^{\lambda t}, \quad \lambda = const$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt die *charakteristische Gleichung:*

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$$

Dies ist eine algebraische Gleichung n-ter Ordnung. Sie hat genau n Wurzeln: $\lambda_1,...,\lambda_n$ (Theorem von Gauß). Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist:

$$x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_ne^{\lambda_n t}.$$

Beispiel 1. $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$;

1) $x = e^{\lambda t} \Rightarrow$ 2) $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow$

3) $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 3$;

Allgemeine Lösung: $x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$.

Beispiel 2. $\ddot{x} - 9x = 0$;

Charakteristische Gleichung:

$\lambda^2 - 9 = 0$; $\lambda^2 = 9$; $\lambda_1 = +3$; $\lambda_2 = -3$;

Allgemeine Lösung: $x = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$.

Beispiel 3. $\ddot{x} + 9x = 0$;

Charakteristische Gleichung:

$\lambda^2 + 9 = 0$; $\lambda^2 = -9$; $\lambda_1 = +3i$; $\lambda_2 = -3i$;

Hier i ist imaginäre Einheit: $i^2 = -1$.

Allgemeine Lösung: $x = C_1e^{3it} + C_2e^{-3it}$

IX. Imaginäre Exponenten

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdot\cdot \Rightarrow$$

$$\left[i^2 = -1;\; i^3 = i^2 \cdot i = -i;\; i^4 = 1\right]$$

$$\Rightarrow 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$= \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right] +$$

$$+ i\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right] =$$

$$= \cos x + i\sin x:$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x \text{ (Eulersche Formel)}}$$

Beispiel 3 – Fortsetzung.

$$x = C_1e^{3it} + C_2e^{-3it} =$$

$$= C_1[\cos 3t + i\sin 3t] + C_2[\cos 3t - i\sin 3t]$$

$$= \underbrace{(C_1 + C_2)}_{A}\cos 3t + \underbrace{(iC_1 - iC_2)}_{B}\sin 3t =$$

$$= A\cos 3t + B\sin 3t$$