Die Eulerschen Gleichungen, Lagerreaktionen bei Rotoren

Literatur: ***Hauger, Schnell und Gross:*** **3.4.2, 3.4.3, 3.4.4**

I. Trägheitstensor (dieses Semester ohne Herleitung).

Die neunkomponentige Größe

$$\Theta_{ij}=\begin{pmatrix}\Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz}\\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz}\\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz}\end{pmatrix}-$$

mit

$$\Theta_{ij}=\sum_{(m)} m\left[r^2\delta_{ij}-r_ir_j\right]$$

heißt Trägheitstensor. Die Diagonalelemente Θ_{xx}, Θ_{yy}, Θ_{zz} sind *axiale Trägheitsmomente,* nicht diagonale Elemente Θ_{xy} u.s.w. sind *Deviationsmomente.* In expliziter Form

$$\left(\Theta_{ik}\right)=\begin{pmatrix}\Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz}\\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz}\\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\sum m\left(y^2+z^2\right) & -\sum mxy & -\sum mxz\\ -\sum myx & \sum m\left(x^2+z^2\right) & -\sum myz\\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m\left(x^2+y^2\right)\end{pmatrix}$$

Für ein Kontinuum $\boxed{\Theta_{ik}=\int\rho dV\left(r^2\delta_{ik}-r_ir_k\right)}$

Der Drehimpuls berechnet sich mit Hilfe des Trägheitstensors als

$$L_i=\sum_{j=x,y,z}\Theta_{ij}\omega_j$$

oder ausführlich:

$$L_x=\sum_j\Theta_{xj}\omega_j=\Theta_{xx}\omega_x+\Theta_{xy}\omega_y+\Theta_{xz}\omega_z$$

$$L_y=\sum_j\Theta_{yj}\omega_j=\Theta_{yx}\omega_x+\Theta_{yy}\omega_y+\Theta_{yz}\omega_z$$

$$L_z=\sum_j\Theta_{zj}\omega_j=\Theta_{zx}\omega_x+\Theta_{zy}\omega_y+\Theta_{zz}\omega_z$$

Die kinetische Energie berechnet sich als

$$K=\frac{1}{2}\Theta_{ij}\omega_i\omega_j\equiv\sum_{i,j=x,y,z}\frac{1}{2}\Theta_{ij}\omega_i\omega_j$$

II. Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente.

Man kann ein kartesisches Koordinatensystem immer so wählen, dass der Trägheitstensor eine Diagonalform annimmt. Diese Koordinatenachsen heißen *Hauptträgheitsachsen* und die Diagonalelemente des Tensors *Hauptträgheitsmomente.* In Hauptachsen verschwinden alle Deviationsmomente:

$$\Theta_{ik}=\begin{pmatrix}\Theta_1 & 0 & 0\\ 0 & \Theta_2 & 0\\ 0 & 0 & \Theta_3\end{pmatrix}.$$

Der Drehimpuls und die kinetische Energie haben dann eine besonders einfache Form:

$$\boxed{\begin{pmatrix}L_x\\ L_y\\ L_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Theta_1 & 0 & 0\\ 0 & \Theta_2 & 0\\ 0 & 0 & \Theta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Theta_1\omega_x\\ \Theta_2\omega_y\\ \Theta_3\omega_z\end{pmatrix}},\ (2)$$

$$\boxed{K=\frac{1}{2}\left(\Theta_1\omega_x^2+\Theta_2\omega_y^2+\Theta_3\omega_z^2\right)}.$$

III. Die Eulerschen Gleichungen

Wenn man den Drehimpuls bezüglich der Hauptachsen berechnet, so muß man bei Berechnung der zeitlichen Ableitung noch die Drehung der Achsen selbst berücksichtigen.

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d'\vec{L}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{L}=\vec{M}$$

Sind ω_1, ω_2 und ω_3 Rotationsgeschwindigkeiten bezüglich der Hauptachsen des Trägheitstensors, so kann man den Drehimpulssatz in der folgenden Form schreiben (Eulersche Gleichungen):

$$\Theta_1\dot{\omega}_1-\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\omega_2\omega_3=M_1$$

$$\Theta_2\dot{\omega}_2-\left(\Theta_3-\Theta_1\right)\omega_3\omega_1=M_2$$

$$\Theta_3\dot{\omega}_3-\left(\Theta_1-\Theta_2\right)\omega_1\omega_2=M_3$$

Beispiel 1: Der momentenfreie symmetrische Kreisel (ein Körper in kardanischer Lagerung oder auch ein frei fliegender Körper)

$$\Theta_1\dot{\omega}_1-\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\omega_2\omega_3=0$$

$$\Theta_2\dot{\omega}_2-\left(\Theta_3-\Theta_1\right)\omega_3\omega_1=0$$

$$\Theta_3\dot{\omega}_3-\left(\Theta_1-\Theta_2\right)\omega_1\omega_2=0$$

Wenn $\Theta_1=\Theta_2=\Theta$ ist, dann ist $\dot{\omega}_3=0$. D.h. um die Symmetrieachse dreht sich der Körper mit einer konstanten Geschwindigkeit.

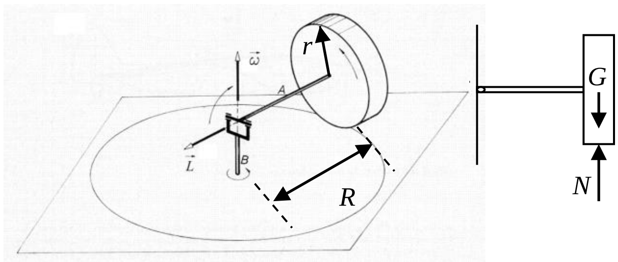
Beispiel 2: Bei kleinen Rotationsgeschwindigkeiten sind alle drei Rotationen unabhängig!

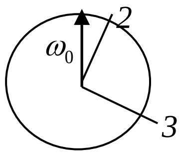
Beispiel 3: Kollermühle

Ein um eine horizontale Achse *A* frei drehbares Rad rollt längst eines Kreises ab. Die Achse *A* wird durch eine zwangsläufige Führung über eine vertikale, angetriebene und mit einer Art

Kardangelenk versehene Achse B eingeleitet und unterhalten (Winkelgeschwindigkeit ω_0).

Zu bestimmen ist die vom Rad auf den Boden ausgeübte Kraft.





<u>Lösung</u>: Den Drehwinkel um die Symmetrieachse bezeichnen wir als α. Die Winkelgeschwindigkeiten um die drei Hauptachsen sind dann:

$$\omega_1 = \dot{\alpha} = \frac{R}{r}\omega_0 \qquad \dot{\omega}_1 = 0$$

$$\omega_2 = \omega_0 \cos\alpha \qquad \dot{\omega}_2 = -\omega_0 \sin\alpha \cdot \dot{\alpha} = \omega_1\omega_3$$

$$\omega_3 = -\omega_0 \sin\alpha \qquad \dot{\omega}_3 = -\omega_1\omega_2$$

Die Eulerschen Gleichungen:

$$M_1 = 0$$

$$M_2 = \left(\Theta_2 - \Theta_3 + \Theta_1\right)\omega_3\omega_1 = \Theta_1 \frac{R}{r}\omega_0^2 \sin\alpha$$

$$M_3 = \left(-\Theta_3 - \Theta_1 + \Theta_2\right)\omega_2\omega_1 = -\Theta_1 \frac{R}{r}\omega_0^2 \cos\alpha$$

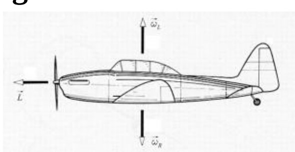
Der Betrag des Kraftmomentes ist

$$|M| = \Theta_1 \frac{R}{r}\omega_0^2 = (N - G)R \quad \Rightarrow$$

$$N = G + \frac{M}{R} = G + \Theta_1 \frac{\omega_0^2}{r} = m\left(g + \frac{1}{2} r\omega_0^2\right)$$

Bei schneller Rotation kann die Druckkraft viel größer als die Gewichtskraft werden!

Beispiel 4: Kreiselwirkung bei Luftschraube



Bei einer Rechtskurve wird die Flugzeugnase nach unten gedrückt und bei einer Linkskurve nach oben. Bei zweimotorigen Flugzeugen und gegenseitig laufenden Luftschrauben werden die Tragflügel verdreht.

IV. Lagerreaktionen bei ebener Bewegung

Dreht sich der Körper um eine feste Achse z, gilt $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$

Für den Drehimpuls $L_i = \Theta_{ij}\omega_j \equiv \sum_{j=x,y,z} \Theta_{ij}\omega_j$

haben wir

$$L_x = \sum_j \Theta_{xj}\omega_j = \Theta_{xx}\cancel{\omega_x} + \Theta_{xy}\cancel{\omega_y} + \Theta_{xz}\omega_z$$

$$L_y = \sum_j \Theta_{yj}\omega_j = \Theta_{yx}\cancel{\omega_x} + \Theta_{yy}\cancel{\omega_y} + \Theta_{yz}\omega_z$$

$$L_z = \sum_j \Theta_{zj}\omega_j = \Theta_{zx}\cancel{\omega_x} + \Theta_{zy}\cancel{\omega_y} + \Theta_{zz}\omega_z$$

Die Änderung des Drehimpulses berechnet sich als $\dot{\vec{L}} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}$ oder

$$\dot{L}_x = \Theta_{xz}\dot{\omega}_z + \cancel{\omega_y} L_z - \omega_z L_y = \Theta_{xz}\dot{\omega}_z - \omega_z^{\,2}\Theta_{yz}$$

$$\dot{L}_y = \Theta_{yz}\dot{\omega}_z + \omega_z L_x - \cancel{\omega_x} L_z = \Theta_{yz}\dot{\omega}_z + \Theta_{xz}\omega_z^{\,2}$$

$$\dot{L}_z = \Theta_{zz}\dot{\omega}_z \cancel{+\omega_x} L_y - \cancel{\omega_y} L_x = \Theta_{zz}\dot{\omega}_z$$

Aus dem Drehimpulssatz folgt

$$\Theta_{xz}\dot{\omega}_z - \omega_z^{\,2}\Theta_{yz} = M_x,$$

$$\Theta_{yz}\dot{\omega}_z + \Theta_{xz}\omega_z^{\,2} = M_y,$$

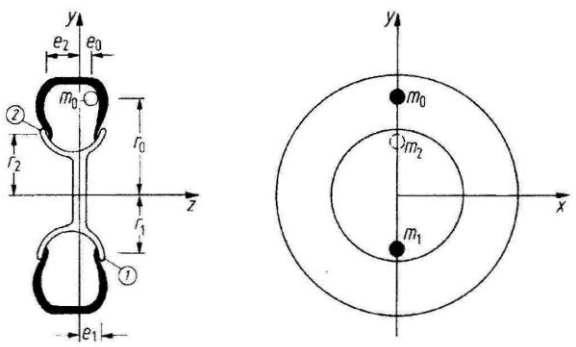
$$\Theta_{zz}\dot{\omega}_z = M_z,$$

Die dritte Gleichung ist die übliche Form des Drallsatzes bei einer ebenen Rotation um eine feste Achse. Die ersten zwei Gleichungen geben die seitens der Achse wirkenden Reaktionsmomente. Die Reaktionsmomente treten nur bei einer Abweichung von einer symmetrischen Form auf (wenn Deviationsmomente nicht gleich Null sind).

Beispiel 5: Auswuchten eines Rades.

An einem Autorad (Drehachse z) befindet sich eine Unwucht mit der Masse m_0.

Welche Massen m_1 und m_2 müssen an den Stellen (1) und (2) angebracht werden, damit das Rad ausgewuchtet ist?



<u>Lösung:</u> Das Rad ist ausgewuchtet, wenn der Schwerpunkt auf der Drehachse liegt und die Deviationsmomente verschwinden:

$$m_0 r_0 + m_2 r_2 - m_1 r_1 = 0$$

$$\Theta_{zy} = -m_0 r_0 e_0 + m_1 r_1 e_1 + m_2 r_2 e_2 = 0.$$

Auflösen liefert die gesuchten Massen

$$m_1 = m_0 \frac{r_0}{r_1}\frac{e_0 + e_2}{e_1 + e_2}, \qquad m_2 = m_0 \frac{r_0}{r_2}\frac{e_0 - e_1}{e_1 + e_2}.$$