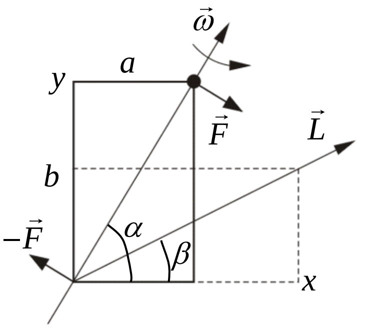
Kreiselbewegung, **Tensor der Trägheitsmomente**

I. Drehimpuls bei einer Drehung um eine beliebige Achse



$\omega_x = \omega\cos\alpha$

$\omega_y = \omega\sin\alpha$

$\Theta_x = \dfrac{mb^2}{12}$

$\Theta_y = \dfrac{ma^2}{12}$

$\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$.

$$L_x = \Theta_x\omega_x = \frac{mb^2}{12}\omega\cos\alpha$$

$$L_y = \Theta_y\omega_y = \frac{ma^2}{12}\omega\sin\alpha$$

$$\tan\beta = \frac{a^2}{b^2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a^2}{b^2}\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \tan^{-1}\alpha\ .$$

Der Vektor des Drehimpulses dreht sich um die Achse.

II. Zeitliche Änderung eines rotierenden Vektors.

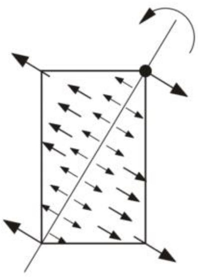
Wenn ein Vektor $\vec{A}$ sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ dreht, so gilt $\dot{\vec{A}} = \vec{\omega}\times\vec{A}$.
Beispiele:

(a) Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

(b) Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

(c) Änderung des Drehimpulses $\dot{\vec{L}} = \vec{\omega}\times\vec{L}$

III. Die in der Achse bei einer Rotation wirkenden Kräfte.

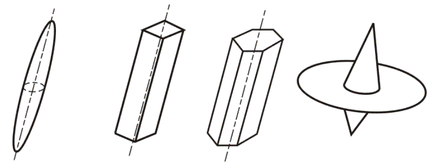


Nach dem Drehimpulssatz gilt $\dot{\vec{L}} = \vec{\omega}\times\vec{L} = \vec{M}$. Ändert sich der Drehimpuls, so muss ein Kraftmoment wirken! Die Änderung des Drehimpulses zeigt in die Tafel. In den Lagern muss somit ein Kräftepaar wirken, wie im Bild 1 gezeigt. Woher stammt dieses Kraftmoment? Betrachten wir die Platte im rotierenden Bezugssystem. Durch die Zentrifugalkräfte entsteht ein Kraftmoment in der gezeigten Richtung. Die Reaktionskräfte in den Lagern wirken in die entgegensetzte Richtung.

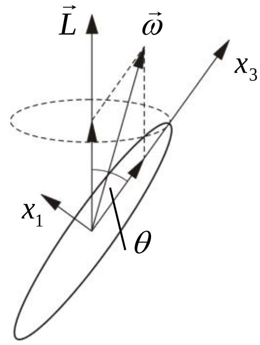
Was geschieht, wenn die Achse nicht festgehalten wird?

IV. Symmetrischer Kreisel

Definition: $\Theta_x = \Theta_y \neq \Theta_z$. Zum Beispiel:



A. Reguläre Präzession (Nutation) eines symmetrischen Kreisels.



$L_1 = \Theta_1\omega_1$

$L_2 = \Theta_2\omega_2 = 0$

$L_3 = \Theta_3\omega_3$

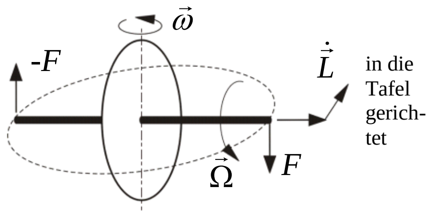
Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Symmetrieachse:

$$\boxed{\omega_3 = \frac{L_3}{\Theta_3} = \frac{L\cos\theta}{\Theta_3}}$$

$$\omega_1 = \omega_{\text{Pr}}\sin\theta = \frac{L\sin\theta}{\Theta_1}$$

Daraus $\boxed{\omega_{\text{Pr}} = \dfrac{L}{\Theta_1}}$. Die Kreisachse beschreibt einen Kreiskegel um die Richtung $\vec{L}$.

V. Präzession unter der Einwirkung eines Kraftmomentes

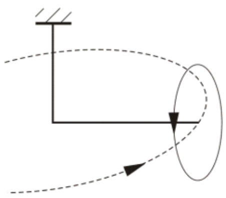


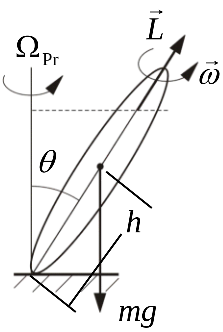
Wenn wir die Kreiselachse gleichmäßig um die vertikale Achse drehen, wie ändert sich der Drehimpuls?

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\omega}\times\vec{L} = \vec{M}$$

Wenn die Kräfte in vertikaler Ebene wirken, so bewegt sich die Achse in der horizontalen Ebene

VI. Spielkreisel

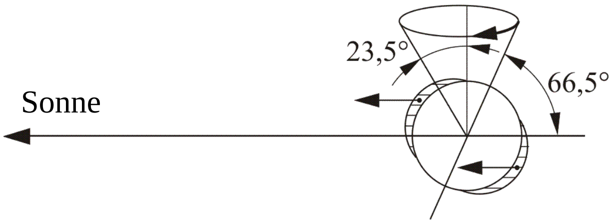




$$\left|\dot{L}\right| = \Omega_{\mathrm{Pr}} L \sin\theta = mgl\sin\theta \quad \Rightarrow$$

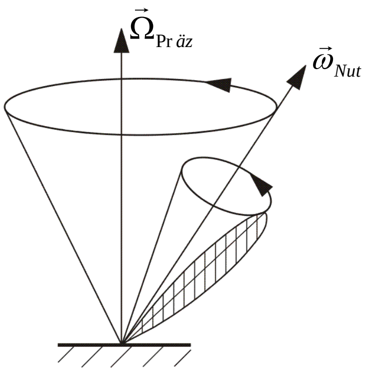
$$\boxed{\Omega_{\mathrm{Pr}} = \frac{mgl}{L} = \frac{mgl}{\Theta\omega}}$$

Astronomisches Beispiel: Präzession der Erde



Periode der astronomischen Präzession $\simeq 25800$ Jahre.

VII. Präzession und Nutation



VIII. Satz vom gleichsinnigen Parallelismus der Drehachsen (Foucault)

> Die Kreiselachse versucht sich gleichsinnig parallel mit der Achse der Zwangsdrehung zu stellen.

.