Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 16.

Drehimpulserhaltungssatz, Exzentrischer Stoß

Literatur: ***Hauger, Schnell und Gross.*** **Technische Mechanik III, 3.3.3**

I. Drehimpulserhaltung: Aus dem Drehimpulssatz $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ folgt, dass *wenn das gesamte Moment aller an einem System angreifenden äußeren Kräfte bezüglich eines Bezugspunktes gleich Null ist, der Drehimpuls bezüglich desselben Punktes konstant bleibt.*

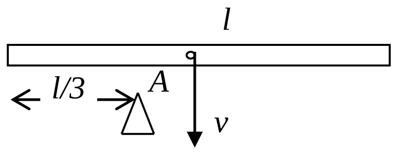
Bemerkung 1: ***Das System muss nicht abgeschlossen sein. Nur das Moment der einwirkenden Kräfte muss verschwinden!***

Bemerkung 2: ***Die Erhaltung des Drehimpulses gilt auch für einzelne Richtungen, auf welchen die Projektion des Momentenvektors gleich Null ist.***

B1. Bei Drehung um eine feste Achse ohne Reibungsmoment gilt $L = \Theta\omega = const$. Verringert sich das Trägheitsmoment, so wird die Winkelgeschwindigkeit größer (Experiment mit Drehschemel).

B2. Hält man in den Händen eine Einrichtung mit einem Rotor und versucht man, die Rotationsachse zu ändern, so entsteht eine Rotationsbewegung in der entgegengesetzten Richtung (2. Experiment mit Drehschemel).

B3. Ein Stab trifft mit der Geschwindigkeit v auf ein Lager A und wird dort eingeknickt. Zu bestimmen ist die Winkelgeschwindigkeit nach dem Aufprall.



Lösung:
Das Kraftmoment bezüglich des Punktes A ist gleich Null. Deshalb bleibt der Drehimpuls erhalten. Bei einer Translationsbewegung ist $\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v} = m\vec{r}_s \times \vec{v}$.

Für den Drehimpuls haben wir deshalb:

"vor": $L_1 = m\dfrac{l}{6}v$

"nach": $L_2 = \Theta\omega = \left(\dfrac{ml^2}{12} + m\left(\dfrac{l}{6}\right)^2\right)\omega = \dfrac{ml^2}{9}\omega$

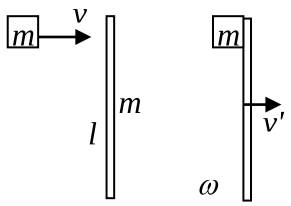
$$L_1 = L_2 \;\Rightarrow\; \omega = \frac{3}{2}\frac{v}{l}.$$

Wie groß ist Energieverlust bei diesem Stoß?

$$K_1 = \frac{m}{2}v^2, \quad K_2 = \frac{ml^2}{9}\frac{\omega^2}{2} = \frac{ml^2}{18}\left(\frac{3}{2}\frac{v}{l}\right)^2 = \frac{mv^2}{8}$$

3/4 der Energie geht verloren.

B4. *Zu berechnen sind lineare und Winkelgeschwindigkeit sowie die Lage des Momentanpols nach einem plastischen Stoß.*



Lösung: Die Energie bleibt hier nicht erhalten. Aber der Impuls und der Drehimpuls bleiben erhalten**,** und zwar bezüglich eines beliebigen Bezugspunktes, da dies ein abgeschlossenes System ist.

Impuls "vor": mv

Impuls "nach": $mv' + m\left(v' + \dfrac{l}{2}\omega\right)$

Impulserhaltung:

$$v' + \left(v' + \frac{l}{2}\omega\right) = v \;\Rightarrow\; \boxed{2v' + \frac{l}{2}\omega = v}$$

Stellen wir den Drehimpulssatz bezüglich des Schwerpunktes des Stabes auf:

Drehimpuls "vor": $mv\dfrac{l}{2}$

Drehimpuls "nach": $m\left(v' + \dfrac{l}{2}\omega\right)\dfrac{l}{2} + \Theta_{Stab}\omega$

Drehimpulserhaltung:

$$m(l/2)\big(v' + \omega(l/2)\big) + \Theta_{Stab}\omega = m(l/2)v$$

oder

$$\big(v' + \omega(l/2)\big) + \frac{2\Theta_{Stab}}{ml}\omega = v$$

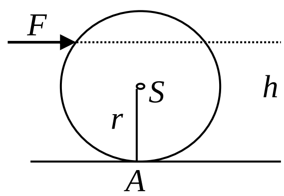
Mit $\Theta_{Stab} = ml^2/12$ folgt daraus $\boxed{v' + \frac{2}{3}l\omega = v}$.

Lösung des umrahmten Gleichungssystems ergibt $\omega = \dfrac{6}{5}\dfrac{v}{l}$ und $v' = \dfrac{1}{5}v$.

Der Momentanpol befindet sich unter dem Schwerpunkt im Abstand $\boxed{\Delta l = \frac{v'}{\omega} = \frac{1}{6}l}$.

Diesen Punkt nennt man ***Stoßmittelpunkt.*** Wird der Körper in diesem Punkt gelagert, so treten beim Stoß keine Lagerreaktionen auf.

B5. In welcher Höhe *h* muss eine Billardkugel horizontal angestoßen werden, damit sie auf *glatter* Bahn nach dem Stoß rollt?



Lösung: Die Rollbedingung bedeutet, dass der Kontaktpunkt mit dem Boden der Momentanpol ist. Daher gilt

$v_s = \omega r$. (1)

Schwerpunktsatz: $m\dot{v}_s = F$. (2)

Drehimpulssatz: $\Theta_s \dot{\omega} = F\left(h - r\right)$. (3)

Dividieren von (3) durch (2) ergibt

$$h = \frac{\Theta_s}{m}\frac{\dot{\omega}}{\dot{v}_s} + r = \frac{7}{5}r .$$

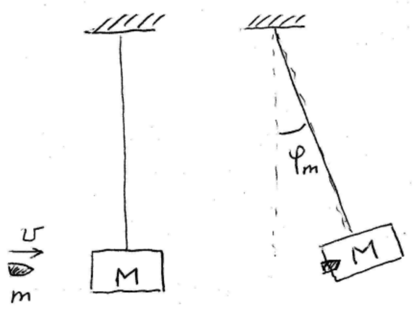
Dasselbe Ergebnis erhält man auch, wenn man den Drallsatz bezüglich des Momentanpols schreibt (ist in diesem Fall richtig, aber nicht empfohlen).

B6. Ein geschlossenes zylindrisches Gefäß (innerer Radius *R*, Höhe *h*, Trägheitsmoment Θ) gefüllt mit Wasser wird *schnell* bis zu einer Winkelgeschwindigkeit ω_0 beschleunigt. Welche Winkelgeschwindigkeit ω_1 wird sich im Zustand einstellen, in dem sich das Gefäß und das Wasser als ganzes drehen? Reibmoment in der Achse ist zu vernachlässigen.

<u>Lösung:</u> Nachdem das Gefäß in die Rotation gesetzt wurde, hat es den Drehimpuls $L_0 = \Theta\omega_0$. Im Endzustand ist der Drehimpuls gleich $L_1 = \left(\Theta + mR^2/2\right)\omega_1$. Da auf das System (bezüglich der Achse) keine äußeren Momente wirken, bleibt der Drehimpuls erhalten: $L_0 = L_1$. Daraus folgt $\omega_1 = \dfrac{\Theta\omega_0}{\left(\Theta + mR^2/2\right)}$. Darauf beruht z.B. die Methode, mit der man ein rohes Ei von einem gekochten Ei unterscheiden kann.

B7. Ballistisches Pendel

Die Geschwindigkeit einer Kugel kann gemessen werden, indem sie in ein "Ballistisches Pendel" (auch Stoßpendel) geschossen und dessen Ausschlagwinkel gemessen wird. Wie hängt die Geschwindigkeit der Kugel von dem maximalen Winkel ab? (Gegeben: Das Trägheitsmoment Θ des Pendels bezüglich des Aufhängepunktes, Masse *M* des Pendels, der Höhenabstand *h* zwischen dem Aufhängepunkt und dem Punkt, wo die Kugel das Pendel trifft, Abstand *l* zwischen dem Aufhängepunkt und dem Schwerpunkt des Pendels, Masse *m* der Kugel).



<u>Lösung:</u> Wir betrachten drei Zustände:
1. Direkt vor dem Zusammenstoß
2. Direkt nach dem Zusammenstoß
3. Maximale Auslenkung des Pendels.

Zwischen 1 und 2 ändert sich der Winkel φ nicht (d.h. er bleibt Null). Das Kraftmoment aller Kräfte bezüglich des Aufhängepunktes ist Null, somit gilt der Drehimpulserhaltungssatz:

$$hmv = \left(\Theta + mh^2\right)\omega \;\Rightarrow\; \omega = \frac{hmv}{\left(\Theta + mh^2\right)} . \quad (1)$$

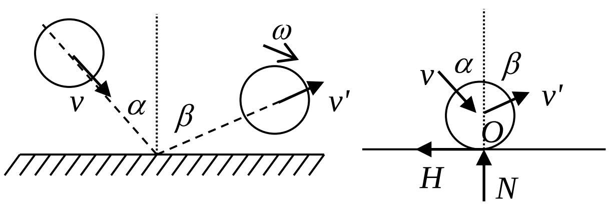
Ab diesem Moment (zwischen 2 und 3) bleibt die Energie erhalten:

$$\frac{\left(hmv\right)^2}{2\left(\Theta + mh^2\right)} = g\left(Ml + mh\right)\left(1 - \cos\varphi_m\right) \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$v = \frac{1}{hm}\sqrt{2\left(\Theta + mh^2\right)g\left(Ml + mh\right)\left(1 - \cos\varphi_m\right)} .$$

B8. *Eine Kugel stößt elastisch mit einer Wand zusammen. Zu bestimmen sind die Geschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit nach dem Abprall (kein Gleiten im Kontakt).*



Bezüglich des Kontaktpunktes *O* ist das Drehmoment aller Kräfte während des Stoßes gleich Null $\Rightarrow$ Drehimpulserhaltung:

$mvr\sin\alpha = mv'r\sin\beta + \Theta_s\omega$ (1)

Beim elastischen Stoß bleibt auch die Energie erhalten:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{\Theta_S\omega^2}{2} \text{ an.} \quad (2)$$

Rollen ohne Gleiten: $v'_x = \omega r = v'\sin\beta$. (3)

Aus diesen drei Gleichungen kann man drei Unbekannte v', ω und β bestimmen.

Mit (3) nehmen (1) und (2) die Form

$$v\sin\alpha = v'\sin\beta\left(1 + \Theta_S/mr^2\right)$$

$$v = v'\sqrt{1 + \Theta_S\sin^2\beta/mr^2}$$

Z.B. wenn $\alpha \approx 90°$, so ist $\sin\beta = 5/7$, $\beta \approx 45°$ und $\omega = 0.71\dfrac{v}{r}$.