Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 15.

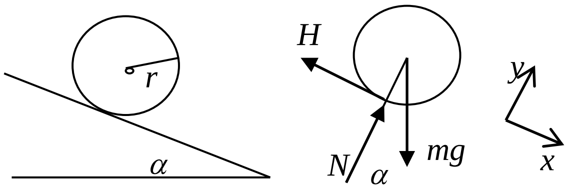
Ebene Dynamik eines starren Körpers: Beispiele

I. Bewegungsgleichungen für Translationsbewegung und für Rotationsbewegung.

Die 3 Bewegungsgleichungen für eine ebene Bewegung sind

$m\ddot{x}_s = F_x$, $m\ddot{y}_s = F_y$, $\Theta_s\ddot{\varphi} = M_s$.

II. Hinabrollende Kugel



Für eine ebene Bewegung gelten die drei Bewegungsgleichungen $m\ddot{x}_s = F_x$, $m\ddot{y}_s = F_y$, $\Theta_s\ddot{\varphi} = M_s$. Dabei sind x_s und y_s Koordinaten des Schwerpunkts und $\Theta_s = \frac{2}{5}mr^2$ ist das Trägheitsmoment der Kugel bezüglich des Schwerpunkts. Die o.g. Gleichungen lauten:

$$m\ddot{x}_s = mg\sin\alpha - H\,, \qquad (1)$$

$$0 = N - mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\alpha \qquad (2)$$

$$\Theta_s\ddot{\varphi} = rH \qquad (3)$$

Beim Rollen ohne Gleiten ist der Berührungspunkt der Kugel mit der Ebene der Momentanpol. Der Abstand des Zentrums vom Momentanpol ist *r*. Somit ist die Geschwindigkeit des Zentrums gleich

$$\dot{x}_s = r\dot{\varphi} \qquad (4)$$

Aus dem Gleichungssystem (1)-(4) folgt für die Beschleunigung

$\ddot{x}_s = \frac{1}{1+\Theta_s/mr^2}g\sin\alpha = \frac{5}{7}g\sin\alpha$ und für die Haftreibung $H = (2/7)mg\sin\alpha$.

Das gilt aber nur solange diese Haftreibung tatsächlich realisiert werden kann, d.h. solange $H \le \mu N \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \frac{H}{N} = \frac{2}{7}\tan\alpha$. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird die Kugel durchrutschen. Z.B. muss für eine stählerne Kugel mit $\mu \approx 0.3$ $\tan\alpha \le \frac{7}{2}\mu \approx 1$ und $\alpha \le 45°$ sein.

Beginnt die Kugel zu rutschen, so steigt die Reibkraft nicht weiter, sondern bleibt gleich $H = \mu N$.

Die Gleichungen (1) und (3) nehmen nun die Form

$m\ddot{x}_s = mg\sin\alpha - \mu N$,

$\Theta_s\ddot{\varphi} = r\mu N$

oder

$m\ddot{x}_s = mg\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)$,

$\Theta_s\ddot{\varphi} = r\mu mg\cos\alpha$ an.

III. Schiefe Ebene mit verschiedenen Rollkörpern (Experiment).

Für einen rotationssymmetrischen Körper mit dem Außenradius *R* gilt

$$\ddot{x}_s = \frac{1}{1+\Theta_s/mR^2}g\sin\alpha$$

Je größer Θ_s/mR^2, d.h. je weiter die Masse von der Achse verteilt ist, desto kleiner ist die Beschleunigung (Beim Holzylinder kleiner, als beim Doppelkegel).

IV. Energieerhaltungssatz.

Die kinetische Energie eines Körpers berechnet sich als die kinetischen Energie der Translationsbewegung des Schwerpunkts plus die kinetische Energie der Rotationsbewegung bezüglich des Schwerpunkts.

$$K = \frac{mv_s^2}{2} + \frac{\Theta_s\omega^2}{2}$$

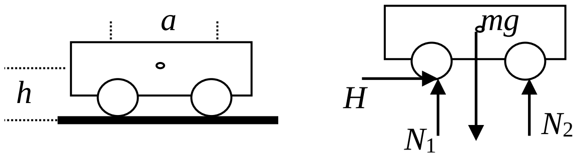
Gibt es im Kontakt kein Gleiten (reines Rollen), so leisten die Reibkräfte im Kontakt keine Arbeit und die Energie bleibt erhalten.

Beispiel. Rollt eine Kugel ohne Gleiten wie in **(I)** aus der Höhe *h*, so lautet der Energieerhaltungssatz zwischen dem Anfangszustand und dem Endzustand am Fuße der geneigten Ebene wie folgt:

$$mgh = \frac{mv_s^2}{2} + \frac{\Theta_s\omega^2}{2}.$$

Unter Berücksichtigung der kinematischen Beziehung $v_s = r\omega$ nimmt der Erhaltungssatz die Form $mgh = \frac{mv_s^2}{2} + \frac{\Theta_s v_s^2}{2r^2} = \frac{v_s^2}{2}\left(m + \Theta_s/r^2\right)$ an.

V. Ein Fahrzeug mit einem Vorder- bzw. Hinterradantrieb.



Die beiden "Schwerpunktgleichungen" lauten
$m\ddot{x} = H$ und $0 = N_1 + N_2 - mg$.
Der Drehimpulssatz bezüglich des Schwerpunktes ist: $0 = \frac{a}{2}N_1 - \frac{a}{2}N_2 - hH$. Hieraus folgt

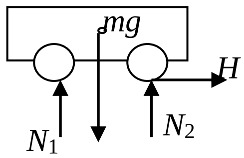
$$N_1 = \frac{mg}{2} + \frac{h}{a}H, \qquad N_2 = \frac{mg}{2} - \frac{h}{a}H.$$

Die maximale Haftkraft genügt der Bedingung

$$H_{\max} = \mu N_1 \;\Rightarrow\; H_{\max} = \mu\left(\frac{mg}{2} + \frac{h}{a}H_{\max}\right) \qquad (5)$$

$\Rightarrow H_{\max} = \frac{mg}{2}\frac{\mu}{1-\mu h/a}$. Die maximale Beschleunigung ist somit $\ddot{x}_{\max} = \frac{g}{2}\frac{\mu}{1-\mu h/a}$. Dies gilt nur solange $N_2 > 0$ ist.
Die maximale Reibkraft ist entweder durch die Bedingung (5) beschränkt oder durch die Bedingung, dass die Vorderräder nicht abheben:
$N_2 = \frac{mg}{2} - \frac{h}{a}H > 0$, $H < \frac{mga}{2h}$. Im zweiten Fall wäre die maximale Beschleunigung gleich
$\ddot{x}_{\max} = \frac{ga}{2h}$. Die maximale Beschleunigung ist gleich dem kleinsten von zwei gefundenen Werten.

Im Fall des Vorderradantriebs genügt die maximale Haftkraft der Bedingung $H_{\max} = \mu N_2$.

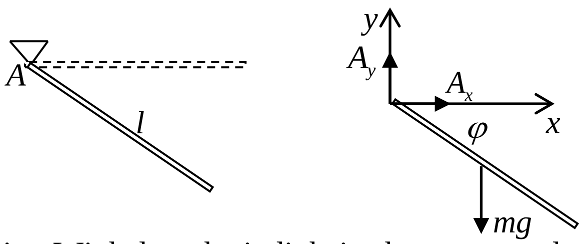


Daraus folgt

$$\ddot{x}_{\max} = \frac{g}{2}\frac{\mu}{1+\mu h/a}$$

(kleiner als beim Antrieb über die Hinterräder).

VI. Schaukeln auf einer Reckstange mit der Amplitude 90°. *Zu bestimmen ist der maximale Wert der horizontalen Komponente der Lagerreaktion.* Modellieren wir den Menschen als einen homogenen Stab mit der Masse *m*.



Die Winkelgeschwindigkeit kann aus dem Energiesatz bestimmt werden.
Energie "vor":

$$U = 0, \; K = 0.$$

Energie bei φ:

$$U = -mg(l/2)\sin\varphi, \; K = \Theta\dot{\varphi}^2/2.$$

Erhaltungssatz: $\frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 = mg\frac{l}{2}\sin\varphi$ oder

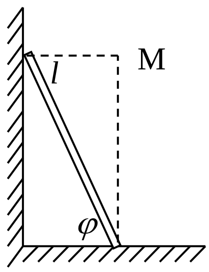
$\boxed{\dot{\varphi}^2 = \frac{mgl}{\Theta}\sin\varphi}$.

Differenzieren nach der Zeit ergibt

$\boxed{\ddot{\varphi} = \frac{mgl}{2\Theta}\cos\varphi}$.

Die horizontale Kraftkomponente ergibt sich aus dem Schwerpunktsatz:
$A_x = m\ddot{x}_s$. Für x_s gilt $x_s = (l/2)\cos\varphi$.
Zweimaliges Differenzieren ergibt
$\ddot{x}_s = -(l/2)\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 - (l/2)\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi} =$
$-\frac{3}{8}\frac{mgl^2}{\Theta}\sin 2\varphi = -\frac{9}{8}g\sin 2\varphi$
Die Reaktionskraft $A_x = -(9/8)mg\sin 2\varphi$ erreicht ihren (betragsmäßig) maximalen Wert $(9/8)mg$ bei $\varphi = 45°$.

VII. Rutschen einer Leiter *Zu bestimmen ist die Geschwindigkeit v des Schwerpunkts als Funktion des Winkels φ.*



Lösung: Der Momentanpol befindet sich im Punkt M. Der Abstand vom Momentanpol zum Schwerpunkt ist gleich $l/2$. Die kinetische Energie ist gleich

$$K = \frac{\Theta_M\omega^2}{2} = \left(\frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)\frac{\omega^2}{2} = \frac{ml^2\omega^2}{6}.$$

Energieerhaltungssatz:
$mg(l/2)\sin\varphi + ml^2\omega^2/6 = mgl/2 \Rightarrow$
$\omega = \sqrt{(3g/l)(1-\sin\varphi)}$.
Die Schwerpunktgeschwindigkeit ist somit gleich
$v_s = \frac{l}{2}\omega = \sqrt{(3gl/4)(1-\sin\varphi)}$.