Trägheitsmomente, Dynamik ebener Bewegung

Literatur: ***Hauger, Schnell und Gross.*** **Technische Mechanik III, 3.2.2**

I. Analogie zwischen einer eindimensionalen Translation und eindimensionalen Rotation

Translation		*Rotation*	
x	*Koordinate*	φ	*Winkel*
$\dot{x} = v$	*Geschwindigkeit*	$\dot{\varphi} = \omega$	*Winkelgeschwindigkeit*
m	*Masse*	Θ	*Trägheitsmoment*
$\vec{F}$	*Kraft*	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	*Kraftmoment*
$p = mv$	*Impuls*	$L = \Theta\omega$	*Drehimpuls*
$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$	*Impulssatz*	$\dot{\vec{L}} = \vec{M}$	*Drehimpulssatz*
$K = \frac{m}{2}v^2$	*Kinetische Energie*	$K = \frac{\Theta}{2}\omega^2$	*Kinetische Energie*
$m\dot{v} = F$	*das 2.N.G.*	$\Theta\dot{\omega} = M$	*sein Analogon*
$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	*Arbeit*	$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$	*Arbeit*

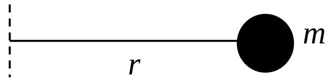
II. Berechnung der Trägheitsmomente

Das Massenträgheitsmoment eines Körpers bezüglich der z-Achse wird definiert als

$$\Theta = \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) \text{ oder}$$

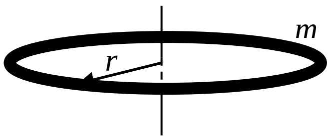
$$\Theta = \int dm \left(x^2 + y^2 \right) = \int \left(x^2 + y^2 \right) \underbrace{\rho}_{\text{Dichte}} \, \underbrace{dV}_{\text{Volumen}}$$

B1.



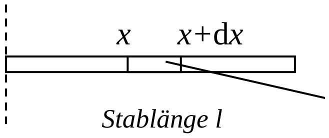
$$\Theta = mr^2$$

B2.



$$\Theta = mr^2$$

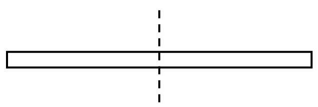
B3.



$$dm = M\frac{dx}{l}$$

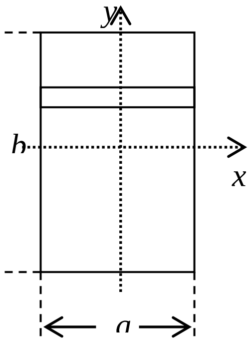
$$\Theta = \int_0^l x^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{M dx}{l} = \frac{Ml^2}{3}$$

B4.



$$\Theta = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dm = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{M dx}{l} = \frac{Ml^2}{12}$$

B5. Platte mit den Seiten *a* und *b*. Bei einer Rotation um die Achse y schneiden wir die



Platte in dünne Streifen senkrecht zur y-Achse. Für jeden Streifen gilt

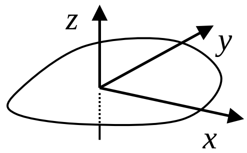
$$d\Theta = dm\frac{a^2}{12}.$$

Nach Integration über alle Massenelemente:

$$\boxed{\Theta_y = m\frac{a^2}{12}}.$$

Bei Rotation um die Achse x: $\boxed{\Theta_x = m\frac{b^2}{12}}$.

B6. "Senkrechten-Achsen-Satz".



Für ebene Figuren (in der Ebene (x,y) liegend) gilt $\Theta_z = \Theta_x + \Theta_y$.

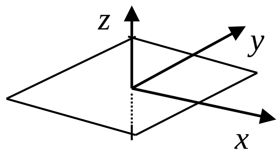
Beweis:

$$\Theta_x = \sum m_i \left(y_i^2 + \cancel{z_i^2} \right) = \sum m_i y_i^2$$

$$\Theta_y = \sum m_i \left(x_i^2 + \cancel{z_i^2} \right) = \sum m_i x_i^2$$

$$\Theta_z = \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) = \Theta_x + \Theta_y.$$

B7. Platte mit den Seiten *a* und *b* senkrecht zur Plattenebene.

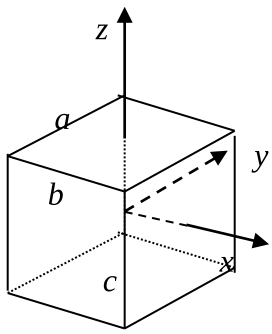


Aufgrund von **B5** und **B6:**

$$\Theta_z = \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2 \right).$$

B8. Quader mit den Seiten *a*, *b* und *c*.

Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse: Wir schneiden den Quader in dünne Platten senkrecht zur z-Achse.



Nach **B7** gilt für jede Platte

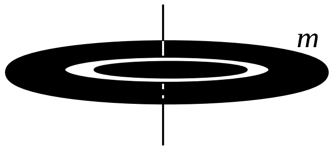
$$d\Theta_z = \frac{dm}{12}\left(a^2 + b^2 \right)$$

Nach Integration über alle Platten:

$$\Theta_z = \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2 \right).$$

Analog $\Theta_x = \frac{m}{12}\left(a^2 + c^2 \right)$, $\Theta_y = \frac{m}{12}\left(b^2 + c^2 \right)$.

B9. Kreis mit dem Radius R.

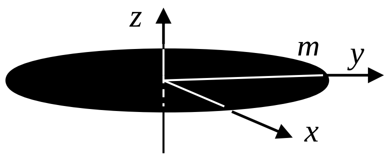


Wir schneiden aus dem Kreis einen dünnen Kreisring mit dem inneren Radius r und dem äußeren Radius $r+dr$. Die Masse des Kreisringes ist $dm = m\dfrac{2\pi r dr}{\pi R^2} = \dfrac{2m}{R^2} r dr$.

Das Trägheitsmoment des Kreisringes ist (nach **B2**) gleich $d\Theta = dm \cdot r^2 = \dfrac{2m}{R^2} r^3 dr$. Das gesamte Trägheitsmoment ergibt sich durch Integration von $r=0$ bis $r=R$:

$$\Theta = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 dr = \frac{mR^2}{2}.$$

B10. Kreis bezüglich einer in seiner Ebene liegenden Achse.

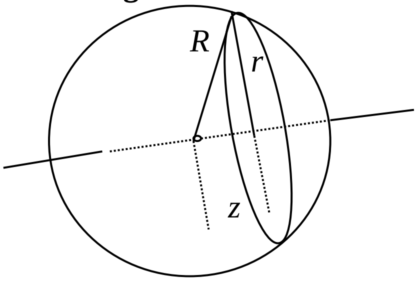


Nach dem "Senkrechten-Achsen-Satz" (**B6**) gilt

$$\Theta_z = \frac{mR^2}{2} = \Theta_x + \Theta_y = 2\Theta_x = 2\Theta_y.$$

Daraus folgt $\Theta_x = \Theta_y = \dfrac{mR^2}{4}$

B11. Kugel mit dem Radius R.



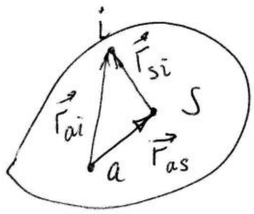
Wir schneiden die Kugel in dünne Kreisscheiben senkrecht zur Rotationsachse. Die Masse einer Scheibe ist $dm = \rho\pi r^2 dz$. Das Trägheitsmoment einer Scheibe ist $d\Theta = \dfrac{dm}{2} r^2 = \dfrac{\rho\pi r^4}{2} dz$. Mit $r^2 = R^2 - z^2$ ergibt sich für das Gesamtträgheitsmoment

$$\Theta = \int_{-R}^{R} \frac{\rho\pi\left(R^2 - z^2\right)^2}{2} dz = \frac{8}{15}\pi\rho R^5. \quad (1)$$

Die Dichte kann man aus der Gleichung $m = \rho V = \rho\dfrac{4}{3}\pi R^3$ erhalten und in (1) einsetzen. (1) erhält dann die Form $\boxed{\Theta = \dfrac{2}{5} mR^2}$.

__Satz von Steiner__

Betrachten wir das Trägheitsmoment Θ_s eines starren Körpers bezüglich einer Achse *s-s*, die durch den Schwerpunkt *S* geht und Trägheitsmoment Θ_a desselben Körper bezüglich einer Achse *a-a* parallel dazu. Der Abstand zwischen beiden Achsen sei *a*. Zwischen den beiden Trägheitsmomenten besteht ein Zusammenhang, der durch den *Satz von Steiner* gegeben wird: $\boxed{\Theta_a = \Theta_s + mr_s^2}$ wobei *m* die Masse des Körpers ist.



__Beweis:__

Das Trägheitsmoment bezüglich der Achse *a* ist gleich

$$\Theta_a = \sum m_i \vec{r}_{ai}^{\,2} = \sum m_i\left(\vec{r}_{si} + \vec{a}\right)^2 =$$

$$= \sum m_i\left(\vec{r}_{si}^{\,2} + 2\vec{r}_{si}\cdot\vec{a} + \vec{a}^2\right) =$$

$$\sum m_i \vec{r}_{si}^{\,2} + 2\vec{a}\cancel{\sum m_i \vec{r}_{si}} + \vec{a}^2\sum m_i = \Theta_s + ma^2$$

__III. Dynamik einer ebenen Bewegung__

Betrachten wir die Bewegung eines starren Körpers in einer Ebene (*x*,*y*) unter der Einwirkung von äußeren Kräften $\vec{F}$. Für ein beliebiges System - auch einen starren Körper - gilt immer der Schwerpunktsatz: $m\ddot{\vec{r}}_s = \vec{F}$, wobei $\vec{r}_s$ Radiusvektor des Schwerpunkts und $\vec{F}$ die Summe aller *äußeren* Kräfte ist. Betrachten wir jetzt die Bewegung des Körpers aus einem Bezugssystem, das eine Translationsbewegung mit dem Schwerpunkt des Körpers ausführt. In diesem System bewegt sich der Schwerpunkt nicht und eine beliebige Bewegung ist eine *reine Rotation* um den Schwerpunkt. Dieses System ist aber ein sich beschleunigt bewegendes und somit kein Inertialsystem. Für eine Rotation um den Schwerpunkt gilt der Drehimpulssatz in der Form $\dot{L} = \Theta_s\ddot{\varphi} = M_s + M_{schein}$, wobei Momente aller physikalischen äußeren Kräfte *und* der Scheinkräfte bezüglich des Schwerpunkts berücksichtigt werden müssen. Das Moment der Scheinkräfte ist aber *bezüglich des Schwerpunktes* gleich Null, da die Scheinkräfte *im Schwerpunkt angreifen*. Somit fallen sie aus dem Drehimpulssatz aus und er nimmt die Form $\dot{L} = \Theta_s\ddot{\varphi} = M_s$ an. Die 3 Bewegungsgleichungen für eine ebene Bewegung sind somit

$$\boxed{m\ddot{x}_s = F_x},\ \boxed{m\ddot{y}_s = F_y},\ \boxed{\Theta_s\ddot{\varphi} = M_s}$$