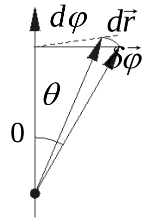
Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 13.

Drehung in drei Dimensionen, Drehimpulssatz, kinetische Energie und Arbeit bei einer Rotation um eine feste Achse. **Literatur:** ***Hauger, Schnell und Gross.*** **Technische Mechanik III, 3.1, 3.2**

I. Reine Rotation eines starren Körpers

Bei einer Rotation um den Winkel $d\varphi$ um die Achse verschiebt sich der Punkt senkrecht zur Ebene (Achse - Radiusvektor) um den Betrag $dr = r\sin\theta \cdot d\varphi.$



Wenn wir einen Vektor $d\vec{\varphi}$ so *definieren*, dass er entlang der Achse gerichtet ist und den Betrag $|d\varphi|$ hat, so gilt: $\boxed{d\vec{r} = d\vec{\varphi}\times\vec{r}}$.

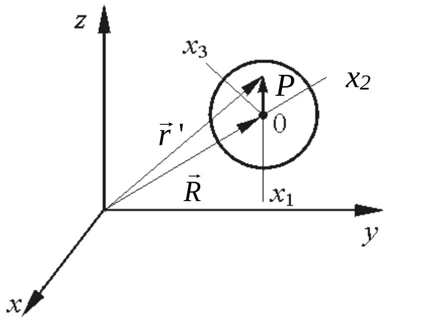
Für die Geschwindigkeit $v = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ ergibt sich

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}}$$

wobei $\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt$ die *Winkelgeschwindigkeit* der Rotation des starren Körpers ist.

II. Allgemeine Bewegung

Zur Beschreibung einer beliebigen Bewegung eines starren Körpers führen wir zwei Koordinatensysteme ein: Ein "raumfestes" System (x,y,z) und ein mit dem starren Körper fest verbundenes System (x_1, x_2, x_3).



Bezeichnungen: *O* ist ein beliebiger Referenzpunkt im Körper, *P* ist ein beliebiger Punkt des Körpers, $\vec{r}$ ist der Radiusvektor des Punktes *P* im beweglichen (in den Körper "eingefrorenen") System. $\vec{r}\,'$ ist der Radiusvektor desselben Punktes im raumfesten System, $\vec{R}$ ist der Radiusvektor des Bezugspunktes *O* im raumfesten System.

Bei einer zusammengesetzten Bewegung (Translation des Punktes *O* und Rotation um diesen Punkt): $\boxed{d\vec{r}\,' = d\vec{R} + d\vec{\varphi}\times\vec{r}}$.

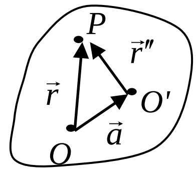
Mit Bezeichnungen:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}, \quad \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}$$

erhält man: $\boxed{\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{r}}$

Wählen wir jetzt den Nullpunkt des mit dem Körper verbundenen Koordinatensystems im Punkt O' im Abstand $\vec{a}$ von *O*. Den Radiusvektor des Punktes *P* relativ zum neuen Bezugspunkt bezeichnen wir mit $\vec{r}\,''$.

$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}\,'' + \vec{a}$



$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega}\times(\vec{r}\,'' + \vec{a}) =$$
$$= \vec{V} + \vec{\omega}\times a + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'' =$$
$$= \vec{V}\,' + \vec{\omega}\,'\times\vec{r}\,'',$$
$$\vec{V}\,' = \vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{a},$$

$\vec{\omega}\,' = \vec{\omega} \Rightarrow$ Die Winkelgeschwindigkeit hängt nicht vom Bezugssystem ab!

III. Eigenschaften des Vektorproduktes

(a) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

(b) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

(c) $(\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \alpha(\vec{a}\times b)$

(d) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

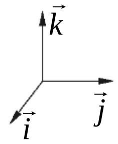
(e) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

(f) $\vec{a}\times\vec{a} = 0$

(d) $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$

<u>Vektorprodukt in Komponenten</u>

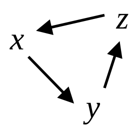
($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - sind Einheitsvektoren):



$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ ,$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

$$\vec{A} = \vec{a}\times\vec{b} = a_x b_x\,\cancel{(\vec{i}\times\vec{i})} + a_x b_y(\vec{i}\times\vec{j}) + a_x b_z(\vec{i}\times\vec{k})$$
$$+ a_y b_x(\vec{j}\times\vec{i}) + a_y b_y\,\cancel{(\vec{j}\times\vec{j})} + a_y b_z(\vec{j}\times\vec{k}) +$$
$$+ a_z b_x(\vec{k}\times\vec{i}) + a_z b_y(\vec{k}\times\vec{j}) + a_z b_z\,\cancel{(\vec{k}\times\vec{k})} \Rightarrow$$
$$\vec{A} = (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i}$$

$$A_x = a_y b_z - a_z b_y$$
$$A_y = a_z b_x - a_x b_z$$
$$A_z = a_x b_y - a_y b_x$$



IV. Beschleunigung bei einer Rotation um eine feste Achse

Indem wir die Gleichung $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ nach der Zeit ableiten, erhalten wir

$$\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}).$$

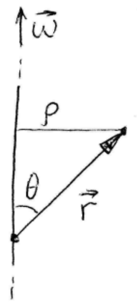
Bei einer konstanten Winkelgeschwindigkeit:

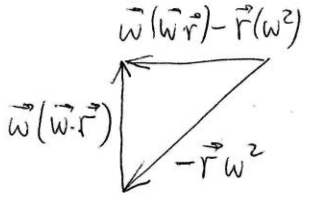
$$\dot{\vec{v}} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}) =$$
$$= \vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r}) - \vec{r}\omega^2$$

Es ist leicht zu sehen, dass dieser Vektor in der gleichen Ebene liegt wie $\vec{\omega}$ und $\vec{r}$ und immer senkrecht zur Achse gerichtet ist:

(Skalarprodukt $\vec{\omega}\cdot\dot{\vec{v}} = \vec{\omega}\cdot\left(\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r}) - \vec{r}\omega^2\right) =$

$= \omega^2 (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \omega^2 (\vec{\omega} \cdot \vec{r})$ ist Null).

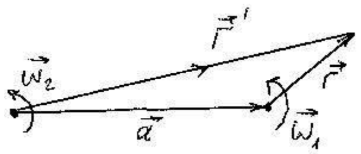




Dem Betrag nach ist dieser Vektor gleich $\boxed{\left|\dot{\vec{v}}\right| = \rho\omega^2}$.

Der Beschleunigungsvektor bei einer Rotation mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ist immer senkrecht zur Achse gerichtet und ist gleich $\rho\omega^2$ *, wobei* ρ *der kürzeste Abstand vom gegebenen Punkt zur Achse ist.*

V. Gleichzeitige Rotation um zwei Achsen



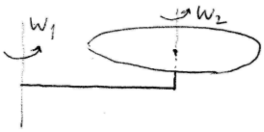
$d\vec{r}'^{(1)} = d\vec{\varphi}_1 \times \vec{r}$,

$d\vec{r}'^{(2)} = d\vec{\varphi}_2 \times \vec{r}'$

$$d\vec{r}' = d\vec{\varphi}_1 \times \vec{r} + d\vec{\varphi}_2 \times \vec{r}' = d\vec{\varphi}_1 \times (\vec{r}' - \vec{a}) + d\vec{\varphi}_2 \times \vec{r}' =$$
$$-d\vec{\varphi}_1 \times \vec{a} + (d\vec{\varphi}_2 + d\vec{\varphi}_1) \times \vec{r}'$$
$$d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_2 + d\vec{\varphi}_1 .$$

Dasselbe gilt für die Winkelgeschwindigkeiten: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.

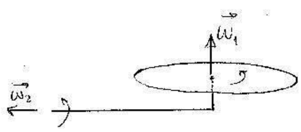
Beispiel 1. Eine Scheibe dreht sich mit einer



Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_1$ um eine vertikale Achse, die sich ihrerseits mit einer Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_2$ um eine vertikale Achse dreht. Zu bestimmen ist die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe.

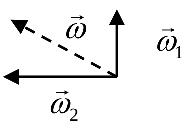
<u>Lösung:</u>
$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$. In diesem Fall $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

Beispiel 2: Eine Scheibe dreht sich mit einer

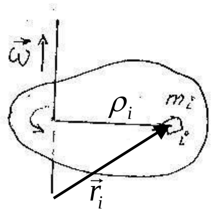


Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_1$ um eine Achse, die sich ihrerseits mit einer Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_2$ um eine horizontale Achse dreht. Zu bestimmen ist die momentane Winkelgeschwindigkeit der Scheibe in der gezeigten Lage.

<u>Lösung:</u>



VI. Dynamik der Rotation um eine feste Achse



Betrachten wir die Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse.
Wir teilen den Körper in kleine Elemente m_i.
Für die Projektion des Drehimpulses auf die Rotationsachse gilt $\dot{L}_{||} = M_{ext,||}$ (1).

Der Drehimpuls ist gleich
$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) =$$
$$\sum m_i \left[\vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \right]$$
Seine Projektion auf die Rotationsachse
$$L_{||} = \vec{L}\vec{e}_{||} = \sum m_i \left[(\vec{\omega} \cdot \vec{e}_{||})(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - (\vec{r}_i \cdot \vec{e}_{||})(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \right] =$$
$$= \sum m_i \left[\omega r_i^2 - \omega r_i^2 \cos^2 \theta \right] = \omega \sum m_i \rho_i^2 = \Theta\omega$$

Die Größe $\qquad \Theta = \sum m_i \rho_i^2$

nennt man *Massenträgheitsmoment bezüglich der Rotationsachse.*

Der Drehimpulssatz (1) nimmt somit die folgende Form an

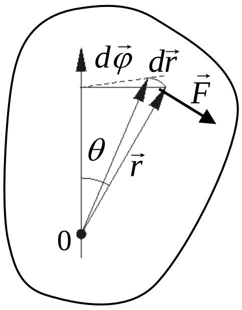
$\boxed{\Theta\dot{\omega} = M_{ext,||} \text{ oder } \Theta\ddot{\varphi} = M_{ext,||}}$ **(Drallsatz)**

wobei $M_{ext,||}$ Kraftmoment aller äußeren Kräfte bezüglich der Rotationsachse ist.

VII. Kinetische Energie bei einer Rotation um eine feste Achse

$$K = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\rho_i \omega)^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum m_i \rho_i^2\right)\omega^2$$
$$\boxed{K = \frac{\Theta\omega^2}{2}}$$

VIII. Arbeit bei einer Rotation um eine feste Achse.



An einem Punkt *P* eines starren Körpers mit dem Radiusvektor $\vec{r}$ greift eine Kraft $\vec{F}$ an. Bei einer Rotation um die gezeigte Achse um den Winkel $d\vec{\varphi}$ verschiebt sich der Angriffspunkt der Kraft um den Vektor $d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$.

Die von der Kraft $\vec{F}$ geleistete Arbeit ist
$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\vec{F} \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{r}) = d\vec{\varphi} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})}_{\text{zyklische Umstellung}}$$

oder $\boxed{dA = d\vec{\varphi} \cdot \vec{M}}$.