Kinematik und Dynamik - Mechanik II / Prof. Popov / Vorlesung 12.

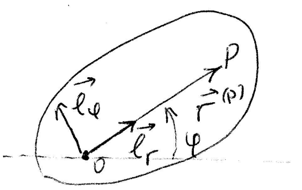
Kinematik der ebenen Rotation.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Gross.*** **Technische Mechanik III, 3.1.3, 3.1.4**

I. Starrer Körper. Einen *starren Körper* kann man als ein System von Massenpunkten definieren, deren Abstände unverändert bleiben. Ein starrer Körper kann im Raum drei unabhängige Translationsbewegungen und drei Rotationen ausführen. Somit ist jeder starre Körper ein mechanisches System mit *6 Freiheitsgraden.*

II. Ebene Rotation

Besonders einfach lässt sich eine *ebene Bewegung* eines starren Körpers beschreiben, d.h. eine Bewegung, bei der sich jeder Punkt des Körpers in einer Ebene bewegt. Ist ein Punkt (O im Bild) des starren Körpers unbeweglich, so kann der Körper nur eine Rotationsbewegung um diesen Punkt ausführen.



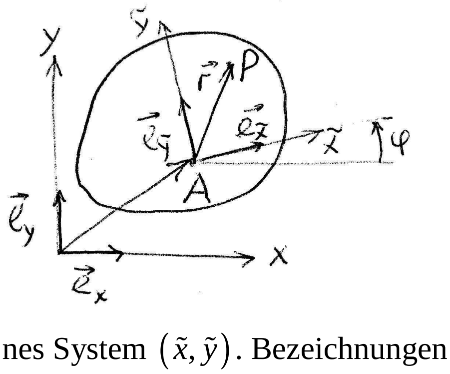
$\vec{r}^{(P)}$ sei der Radiusvektor vom unbeweglichen Zentrum zu einem beliebigen Punkt *P*. Es gilt: $\vec{r}^{(P)} = r\vec{e}_r$, wobei $\vec{e}_r$ ein Einheitsvektor in Richtung $\vec{r}^{(P)}$ ist. Für die Geschwindigkeit des Punktes *P* erhalten wir

$\dot{\vec{r}}^{(P)} = \cancel{\dot{r}}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = r\omega\vec{e}_\varphi$.

Die zeitliche Ableitung des Winkels $\dot{\varphi} = \omega$ heißt *Winkelgeschwindigkeit* des Körpers (sie ist gleich für alle Punkte des Körpers).

III. Zusammengesetzte Bewegung

Zur Beschreibung einer beliebigen Bewegung eines starren Körpers führen wir zwei Koordinatensysteme ein: Ein "raumfestes" System (x,y) und ein mit dem starren Körper fest verbundenes System $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Bezeichnungen: A sei ein beliebiger Referenzpunkt im Körper, *P* ist ein beliebiger Punkt des Körpers, $\vec{r}$ ist der Radiusvektor des Punktes *P* im beweglichen (in den Körper "eingefrorenen") System. $\vec{r}_P$ sei der Radiusvektor desselben Punktes im raumfesten System, $\vec{r}_A$ sei der Radiusvektor des Bezugspunktes A im raumfesten System.



Offenbar gilt: $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}$.

Die zeitliche Ableitung ergibt die Geschwindigkeit: $\dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_A + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ (1)

$\dot{\vec{r}}_A$ nennt man *Geschwindigkeit der Translationsbewegung* des Körpers, $\dot{\varphi} = \omega$ die *Winkelgeschwindigkeit.*

IV. Momentanpol

Die den zwei Koordinatensystemen entsprechenden Einheitsvektoren bezeichnen wir als $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_{\tilde{x}}, \vec{e}_{\tilde{y}}$. Für den Radiusvektor $\vec{r}_P$ des Punktes *P bezüglich des raumfesten Koordinatensystems* gilt dann

$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r} = \vec{r}_A + \tilde{x}\vec{e}_{\tilde{x}} + \tilde{y}\vec{e}_{\tilde{y}}$.

Projektionen auf die Koordinatenachsen (x,y):

$$x_P = \vec{r}_P \cdot \vec{e}_x = \left(\vec{r}_A + \tilde{x}\vec{e}_{\tilde{x}} + \tilde{y}\vec{e}_{\tilde{y}}\right) \cdot \vec{e}_x =$$
$$\vec{r}_A \cdot \vec{e}_x + \tilde{x}\vec{e}_{\tilde{x}} \cdot \vec{e}_x + \tilde{y}\vec{e}_{\tilde{y}} \cdot \vec{e}_x$$

$$y_P = \vec{r}_P \cdot \vec{e}_y = \left(\vec{r}_A + \tilde{x}\vec{e}_{\tilde{x}} + \tilde{y}\vec{e}_{\tilde{y}}\right) \cdot \vec{e}_y =$$
$$y_A + \tilde{x}\vec{e}_{\tilde{x}} \cdot \vec{e}_y + \tilde{y}\vec{e}_{\tilde{y}} \cdot \vec{e}_y$$

Daraus folgt:

$$x_P = x_A + \tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi$$
$$y_P = y_A + \tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi$$

Die Geschwindigkeit des Punktes *P* erhalten wir durch Ableitung der Koordinaten nach der Zeit (dabei wird berücksichtigt, dass $\varphi = \varphi(t)$ und die Kettenregel benutzt):

$$\dot{x}_P = \dot{x}_A + \left(-\tilde{x}\sin\varphi - \tilde{y}\cos\varphi\right)\dot{\varphi}$$
$$\dot{y}_P = \dot{y}_A + \left(\tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi\right)\dot{\varphi}.$$

Ist $\dot{\varphi} \neq 0$, so kann man immer einen Punkt M finden, dessen Geschwindigkeit Null ist:

$$\dot{x}_M = \dot{x}_A + \left(-\tilde{x}\sin\varphi - \tilde{y}\cos\varphi\right)\dot{\varphi} = 0$$
$$\dot{y}_M = \dot{y}_A + \left(\tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi\right)\dot{\varphi} = 0.$$

Auflösung dieses Gleichungssystems nach $(\tilde{x}, \tilde{y})$ gibt die Lage von diesem Punkt in dem starr mit dem Körper verbundenen Koordinatensystem:

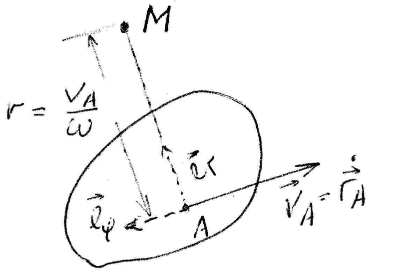
$$\tilde{x}_M = \frac{1}{\dot{\varphi}}\left(\dot{x}_A \sin\varphi - \dot{y}_A \cos\varphi\right),$$

$$\tilde{y}_M = \frac{1}{\dot{\varphi}}\left(\dot{x}_A \cos\varphi + \dot{y}_A \sin\varphi\right).$$

Dieser Punkt heißt ***Momentanpol*** des Körpers. Da sich Momentanpol nicht bewegt, kann sich der Körper nur um diesen Punkt drehen.

Eine beliebige Bewegung eines starren Körpers kann somit (auf kurzen Zeitabschnitten) als eine *reine Drehung* angesehen werden.

Die Lage des Momentanpols lässt sich auch geometrisch bestimmen. Aus der vektoriellen Gleichung (1): $\dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}}_A + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \vec{v}_A + r\omega\vec{e}_\varphi$ folgt für den Momentanpol: $\dot{\vec{r}}_M = \vec{v}_A + r\omega\vec{e}_\varphi = 0$.



Daraus folgt $\vec{e}_\varphi = -\dfrac{\vec{v}_A}{r\omega}$: Der Vektor $\vec{e}_\varphi$ ist entgegengesetzt zu $\vec{v}_A$ gerichtet.

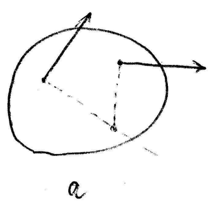
Das bedeutet, dass der Vektor $\vec{e}_r$, der immer senkrecht zu $\vec{e}_\varphi$ steht, senkrecht zur Richtung von $\vec{v}_A$ steht. In der Projektion auf die Richtung v_A lautet die Gleichung (1): $v_A = r\omega$. Daraus $r = v_A/\omega$.

Bemerkung 1. Der Momentanpol kann auch außerhalb des starren Körpers liegen.

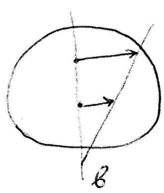
Bemerkung 2. Der Momentanpol ist ein Punkt, der sich zum gegebenen Zeitpunkt nicht bewegt. *Die Lage des Momantanpols* kann sich aber ändern. Das bedeutet, dass sich der Körper im nächsten Zeitpunkt um eine etwas verschobene Achse dreht usw. Die Gesamtheit aller momentanen Drehzentren nennt man *Rastpolbahn.*

V. Wie findet man den Momentanpol?

1. Sind die Richtungen der Geschwindigkeiten von *zwei* Punkten eines starren Körpers gegeben (Bild (a)), so liegt der Momentanpol auf dem Schnitt der Senkrechten zu den jeweiligen Geschwindigkeiten.

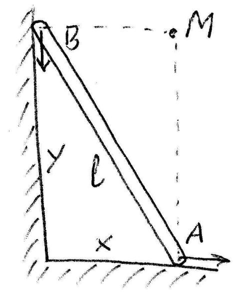


2. Sind die Geschwindigkeiten von zwei Punkten *parallel zu einander* (Bild (b)), so liegt das Momentanzentrum auf dem Schnittpunkt der Senkrechten zu den beiden Geschwindigkeiten mit der Verbindungsgeraden der Pfeilspitzen beider Geschwindigkeiten.



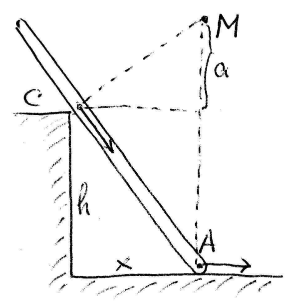
3. Rollt ein Körper auf einer unbeweglichen Fläche *ohne Gleiten*, so befindet sich der Momentanpol im Kontaktpunkt. (Bei reinem Rollen eines Rades kann man sich vorstellen, dass die starre Unterlage und das Rad miteinander verzahnt sind. Der Kontaktpunkt kann sich somit relativ zur Unterlage nicht bewegen).

Beispiel 1. Eine Leiter ist gegen eine Wand gestützt und gerät ins Rutschen. Wo liegt der Momentanpol?



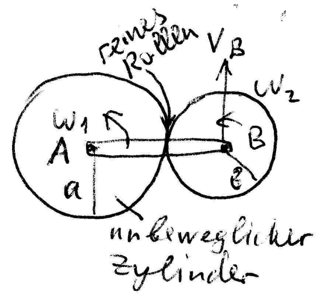
Lösung: Die Geschwindigkeiten des oberen und des unteren Endes der Leiter sind entlang der Wand bzw. dem Boden gerichtet. Der Momentanpol liegt auf dem Schnitt der Senkrechten zu den Geschwindigkeiten.

Beispiel 2. Ein Stab gleitet von einer Stufe (Höhe *h*) ab. Wo liegt das Momentanzentrum?



Lösung: Im Punkt A gleitet der Stab entlang dem Boden, im Punkt C in seiner eigenen Längsrichtung. Offenbar ist $a/x = x/h$. Daraus folgt $a = x^2/h$ und $y = h + x^2/h$.

Beispiel 3. An einer Achse (A) ist unbeweglich ein Zylinder mit dem Radius *a* befestigt. Um die gleiche Achse dreht sich eine Stange AB mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1. Am anderen Ende der Stange ist frei drehbar ein Rad mit dem Radius *b* angebracht, das an dem unbeweglichen Zylinder ohne Rutschen rollt. Zu bestimmen ist die Winkelgeschwindigkeit ω_2 des Rades.



Lösung: Punkt A ist der Momentanpol der Stange. Für die Geschwindigkeit des Punktes B ergibt sich somit $v_B = \omega_1(a+b))$. Der Kontaktpunkt des Rades mit dem Zylinder ist der Momentanpol des Rades. Daher $v_B = \omega_2 b$. Aus dem Vergleich beider Ausdrücke folgt: $\omega_2 = \omega_1(a+b)/b$.

Weitere Beispiele s. Hauger, Schnell, Gross, Technische Mechanik 3 (Beispiele 3.3, 3.4).