Drehimpuls, Drehimpulssatz (Drallsatz).

Literatur: ***Hauger, Schnell und Gross.*** **Technische Mechanik III, 1.2.6, 2.3**

I. Drehimpuls (Drall) eines Massenpunktes

Den Vektor $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$

bezeichnet man als *Drehimpuls* des Massenpunktes. $\vec{r}$ ist dabei der Radiusvektor des Massenpunktes von einem festen Bezugspunkt, der frei wählbar ist. Der Drehimpuls hängt somit von der Wahl des Bezugspunktes ab.

II. Der Drehimpulssatz (Drallsatz)

Zeitliche Ableitung des Drehimpulses ergibt:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = \left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right) \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\left(\frac{d}{dt}\vec{v}\right) =$$

$$= \left(\vec{v}\right) \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = 0 + \vec{M}.$$

$\vec{M}$ ist hier das *Kraftmoment* bezüglich desselben Koordinatenursprunges. Für die zeitliche Ableitung des Drehimpulses gilt somit:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}$$

Die zeitliche Ableitung des Drehimpulses im Bezug auf einen raumfesten Punkt ist gleich dem Moment der am Massenpunkt angreifenden Kraft bezüglich desselben Punktes. (**Drehimpulssatz**)

III. Drehimpulserhaltung

Verschwindet das Moment $\vec{M}$, so ist $\dot{\vec{L}} = 0$ oder $\vec{L} = const$ - der Drehimpuls bleibt erhalten.

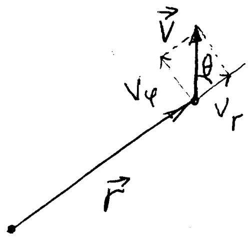
Anders als beim Impulserhaltungssatz kann der Drehimpuls auch in einem nicht abgeschlossenen System erhalten bleiben. Dafür ist es notwendig, dass das Kraftmoment verschwindet (nicht aber unbedingt die Kraft selbst!)

IV. Bewegung in einem Zentralfeld.

Zeigt bei einer Bewegung der Kraftvektor stets zu einem Zentrum O hin, so verschwindet das Moment bezüglich O, denn in diesem Fall haben $\vec{F}$ und $\vec{r}$ stets die gleiche Richtung, somit gilt $\vec{r} \times \vec{F} \equiv 0$. Der Drehimpuls bezüglich des genannten Kraftzentrums bleibt somit erhalten.

V. Ebene Bewegung.

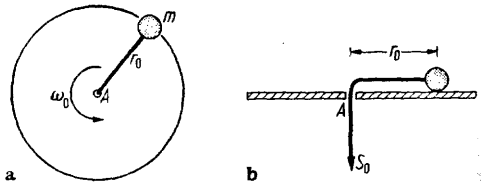
Liegt die gesamte Bahn in einer Ebene (sagen wir (x,y)) und wählen wir als Bezugspunkt einen Punkt in derselben Ebene, so hat der Drehimpuls eine einzige Komponente L_z.



Index z wird in diesem Fall meistens ausgelassen. Für die einzige Drallkomponente erhalten wir

$$L = mrv\sin\theta = mrv_\varphi = mr^2\omega$$

Beispiel 1. Eine Masse m, die von einem Faden gehalten wird, bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 auf einer glatten, waagerechten Kreisbahn mit dem Radius r_0.



Der Faden wird durch ein Loch A in der Mitte der Kreisbahn geführt.

a) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω_1, wenn der Faden so angezogen wird, dass sich die Masse im Abstand r_1 bewegt?

b) Wie ändert sich dabei die Fadenkraft?

<u>Lösung:</u> Die Spannkraft des Fadens zeigt stets zum Punkt A. Sie hat bezüglich A kein Moment. Der Drehimpuls bezüglich A bleibt somit erhalten:

Der Drehimpuls im Anfangszustand:

$L_0 = mr_0^2\omega_0$.

Der Drehimpuls im Endzustand:

$L_1 = mr_1^2\omega_1$.

Aus der Drehimpulserhaltung $mr_0^2\omega_0 = mr_1^2\omega_1$

folgt $\boxed{\omega_1 = \omega_0\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2}$.

Das 2. N.G. für eine Bewegung auf einer Kreisbahn unter der Wirkung der radialen Spannkraft S lautet:

$$S = m\omega^2 r = mr\left(\frac{r_0}{r}\right)^4\omega_0^2 = m\frac{r_0^4}{r^3}\omega_0^2 = \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 S_0.$$

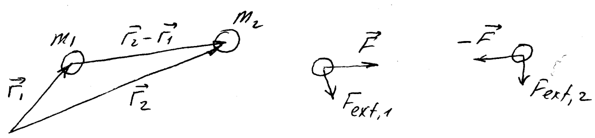
Beispiel 2. Geschwindigkeit eines Satelliten in Anwesenheit eines kleinen Widerstandes.

Auf die erdnahen Satelliten wirkt eine sehr kleine Widerstandskraft, die sich erst über große Zeiträume bemerkbar macht. Wie ändert sich die Geschwindigkeit eines Satelliten unter der Wirkung der Widerstandskraft?

<u>Lösung:</u> In erster Annäherung bewegt sich der Satellit auf einer Kreisbahn, deren Radius sich aber sehr langsam ändert. Der Drehimpuls des Satelliten ist gleich $L = mrv$. Aus dem 2.N.G. für die Kreisbewegung folgt $m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$. Indem wir aus dieser Gleichung den Radius bestimmen und in die Gleichung für den Drehimpuls einsetzen, erhalten wir $L = \frac{GMm}{v}$.

Die Widerstandskraft übt auf den Satelliten ein kleines *negatives* Kraftmoment aus. Der Drehimpuls wird daher langsam abnehmen. Das bedeutet, dass die Geschwindigkeit *größer* wird: Reibung führt zur "Beschleunigung" des Satelliten!

VI. Drallsatz für ein Mehrkörpersystem



Betrachten wir ein Zweikörpersystem, dessen Körper sowohl miteinander, als auch mit Körpern außerhalb des Systems wechselwirken. Der gesamte Drehimpuls des Systems ist

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2 .$$

Seine zeitliche Ableitung ist gleich

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r}_1 \times m_1\dot{\vec{v}}_1 + \dot{\vec{r}}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\dot{\vec{v}}_2 + \dot{\vec{r}}_2 \times m_2\vec{v}_2 .$$

Nach dem 2.N.G. gilt

$$m_1\dot{\vec{v}}_1 = \vec{F}_1 = \vec{F} + \vec{F}_{ext,1}, \quad m_2\dot{\vec{v}}_2 = \vec{F}_2 = -\vec{F} + \vec{F}_{ext,2} .$$

Für $\dot{\vec{L}}$ ergibt sich somit

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r}_1 \times \left(\vec{F} + \vec{F}_{ext,1}\right) + \vec{v}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times \left(-\vec{F} + \vec{F}_{ext,2}\right) + \vec{v}_2 \times m_2\vec{v}_2$$

oder

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r}_1 \times \left(\vec{F} + \vec{F}_{ext,1}\right) + \vec{r}_2 \times \left(-\vec{F} + \vec{F}_{ext,2}\right) =$$

$$= \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \vec{F} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{ext,1} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{ext,2}$$

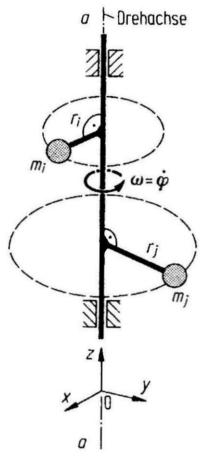
Da $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ und $\vec{F}$ die gleiche Richtung haben (das 3. Newtonsche Gesetz!) erhalten wir endgültig

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r}_1 \times \left(\vec{F} + \vec{F}_{ext,1}\right) + \vec{r}_2 \times \left(-\vec{F} + \vec{F}_{ext,2}\right) =$$

$$= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{ext,1} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{ext,2} = \vec{M}_{ext,1} + \vec{M}_{ext,2} = \vec{M}_{ext}$$

> $\dot{\vec{L}} = \vec{M}_{ext}$
>
> Die zeitliche Ableitung des gesamten Drehimpulses eines Mehrkörpersystems bezüglich eines festen Punktes ist gleich dem resultierenden Moment aller *äußeren* Kräfte bezüglich desselben Punktes. (**Drehimpulssatz**).

VII. Drehung eines Massenpunktsystems um eine feste Achse.



Wir betrachten ein System von Massen, die alle starr mit einer Achse verbunden sind. Alle Massen führen eine ebene Bewegung aus und bewegen sich mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$. Der gesamte Drehimpuls (genauer gesagt, seine z-Komponente) ist in diesem Fall gleich

$$L_a = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\varphi} = \Theta_a \dot{\varphi} . \quad (1)$$

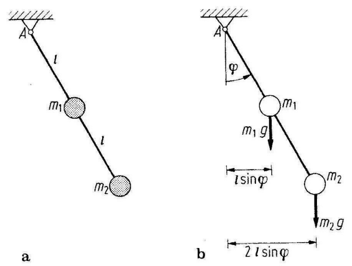
Die Größe $\Theta_a = \sum_i m_i r_i^2$ bezeichnet man als *Massenträgheitsmoment* des Systems bezüglich der gegebenen Achse.

Leitet man (1) unter Beachtung von $\Theta_a = const$ nach der Zeit ab, so folgt

$\boxed{\Theta_a \ddot{\varphi} = M_a}$.

Auch diese Gleichung nennt man oft *Drehimpulssatz*, obwohl dies lediglich *eine* spezielle Form des Drehimpulssatzes ist.

Beispiel 3. Das in *A* aufgehängte Pendel besteht aus einer starren, masselosen Stange, an der die Massen m_1 und m_2 angebracht sind. Es ist die Bewegungsgleichung für eine ebene Bewegung des Pendels aufzustellen.



<u>Lösung:</u> Das Massenträgheitsmoment des Systems um den Punkt *A* ist gleich

$$\Theta = m_1 l^2 + m_2 (2l)^2 = (m_1 + 4m_2) l^2 .$$

Das Kraftmoment ist

$$M = -m_1 g l \sin\varphi - m_2 g 2l \sin\varphi = -gl(m_1 + 2m_2)\sin\varphi$$

Der Drehimpulssatz lautet:

$$(m_1 + 4m_2) l^2 \ddot{\varphi} = -gl(m_1 + 2m_2)\sin\varphi . \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{g(m_1 + 2m_2)}{l(m_1 + 4m_2)}\sin\varphi}$$