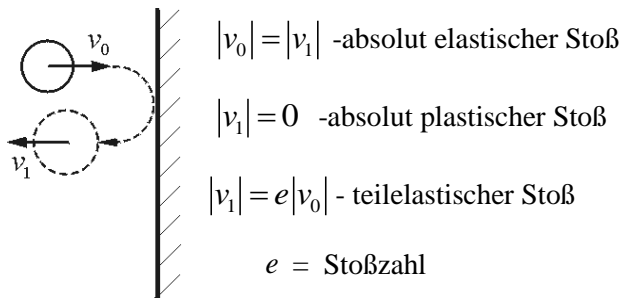


I. Elastischer und nicht elastischer Stoß



Beim elastischen Stoß bleibt Energie erhalten.

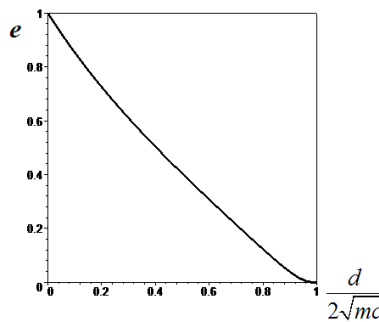
Ein Modell für einen teilelastischen Stoß.



Ein Körper mit Masse m ist mit einer Feder (Steifigkeit c) und einem Dämpfer (Dämpfungskonstante d) versehen. Er

stößt gegen eine starre Wand mit der Geschwindigkeit v_0 . Mit den Methoden, die später bei der Schwingungstheorie erläutert werden (Vorlesung 21) kann man zeigen, dass für $d > 2\sqrt{mc}$ der Stoß absolut plastisch ist: Der Körper springt nicht zurück.

Für $d < 2\sqrt{mc}$ ist der Stoß teilelastisch und die Stoßzahl kann durch die Gleichung



$$e = \exp\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{4mc/d^2 - 1}}\right)$$

angenähert werden (Bild oben).

Beispiel 1: Man lässt eine elastische Kugel aus einer Höhe h_1 auf eine starre ebene Fläche fallen. Nach dem Stoß erreicht sie eine Höhe h_2 . Wie groß ist die Stoßzahl?

Lösung: Die Geschwindigkeit vor dem Stoß ist gleich $v_1 = \sqrt{2gh_1}$.

Die nach dem Stoß $v_2 = \sqrt{2gh_2}$.

Die Stoßzahl ist gleich $e = v_2 / v_1 = \sqrt{h_2 / h_1}$.

Bei $h_2 / h_1 = 0.78$ ist $e = 0.88$. Nach vier Stößen wird die Höhe $0.78^4 h_1 = 0.37h_1$ sein.

II. Teilelastischer Stoß zweier Körper

Beim teilelastischen Stoß verringert sich der Betrag der relativen Geschwindigkeit:

$$e(v_1 - v_2) = -(v'_1 - v'_2).$$

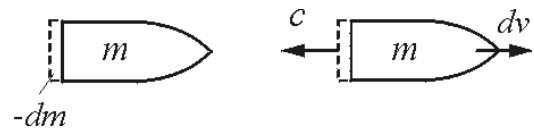
Aus dieser Gleichung zusammen mit dem Impulserhaltungssatz $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$ kann man v'_1 und v'_2 bestimmen:

$$v'_2 = \frac{1}{m_1 + m_2} [m_1 v_1 (1 + e) + v_2 (m_2 - e m_1)]$$

$$v'_1 = \frac{1}{m_1 + m_2} [m_2 v_2 (1 + e) + v_1 (m_1 - e m_2)]$$

III. Körper mit veränderlicher Masse

a) Rakete im Weltraum



Eine Rakete stößt Verbrennungsprodukte mit einer Abstoßgeschwindigkeit c aus. Die verbliebene Masse der Rakete sei $m(t)$. Das Massendifferential dm ist eine negative Größe. Deshalb ist die abgestoßene Masse gleich $-dm$. Wir gehen in ein Inertialsystem über, das sich zum Zeitpunkt t mit der Rakete bewegt.

Impulserhaltung beim Abstoß einer kleinen Gasmasse $-dm$:

Impuls "vor" = 0

Impuls "nach" = $mdv - c(-dm) = 0$

$$dv = -cdm / m; \tag{1}$$

Diese Änderung der Geschwindigkeit gilt natürlich in jedem Inertialsystem, auch im "ruhenden". Integration von (1) führt zur

Ziolkowski-Gleichung:

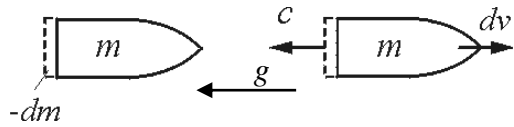
$$v = -c \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = -c \ln \frac{m}{m_0} = c \ln \frac{m_0}{m}$$

Beispiel 2. Wie schwer muss eine Rakete mindestens sein, damit sie eine Kapsel mit der Masse m bis zur Geschwindigkeit v beschleunigen kann? Antwort: $\frac{m_0}{m} = e^{v/c}$;

Beispiel: $v = \text{Fluchtgeschwindigkeit (11,2 km/s)}$
 $c = 2, 3 \text{ oder } 4 \text{ km/s}$

$e^{11,2/2} = 270$; $e^{11,2/3} = 40$; $e^{11,2/4} = 16$.

b) Rakete im Schwerfeld



Das System ist *nicht* abgeschlossen, der Impuls bleibt nicht erhalten. Der Impulssatz gilt aber für alle Systeme, auch nicht abgeschlossene:
Impuls "vor" = 0

Impuls "nach" = $mdv - c(-dm)$.

Die Änderung des Impulses ist gleich Kraft mal Zeit:

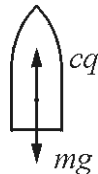
$$dp = mdv - c(-dm) = Fdt = -(m + dm)gdt \approx -mg \cdot dt$$

Daraus folgt $m \frac{dv}{dt} = -mg + c \frac{(-dm)}{dt}$. (2)

$\frac{(-dm)}{dt} = q$ ist die pro Zeiteinheit

ausgestoßene Masse. Die Gleichung (2) nimmt die Form an:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + cq = F_s + S$$



F_s ist die Schwerkraft, S ist der Schub.

Angenommen, die Massenänderung q ist konstant. Dann gilt: $m = m_0 - qt$

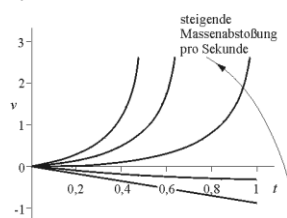
$$\frac{dv}{dt} = \frac{cq}{m} - g = -g + \frac{cq}{m_0 - qt}$$

$$v = -gt + \int_0^t \frac{cq}{m_0 - qt} dt = -gt - c \log \left(1 - \frac{q}{m_0} t \right)$$

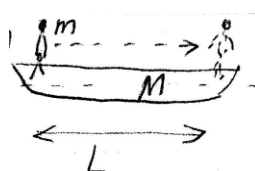
Grenzfall: kleine t

$$v = -gt + c \frac{q}{m_0} t = \frac{cq - m_0 g}{m_0} t$$

Ein Start ist nur dann möglich, wenn $cq > m_0 g$



Beispiel 3. Ein Mensch (Masse m) geht vom Bug eines (am Anfang ruhenden) Bootes (Länge L) zum Heck über. Wie verschiebt sich das Boot unter den folgenden Annahmen: (a) Es gibt keine Reibung zwischen dem Boot und dem Wasser, (b) Es gibt eine Widerstandskraft proportional zur Geschwindigkeit?



Wie verschiebt sich das Boot unter den folgenden Annahmen: (a) Es gibt keine Reibung zwischen dem Boot und dem Wasser, (b) Es gibt eine Widerstandskraft proportional zur Geschwindigkeit?

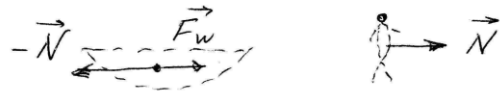
Die Länge des Bootes ist $L = x_1 - x_2$.
Verschiebung des Schwerpunktes:

$$\Delta x_s = \frac{mx_1 + Mx_2}{m + M} = 0$$

(Null nach dem Schwerpunktsatz).

Aus dem Gleichungssystem folgt

$$x_2 = -\frac{m}{M + m} L$$



Lösung (b): Mit Widerstandskraft

Das 2. N.G. für den Menschen und das Boot:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = N \\ M\ddot{x}_2 = -N - \alpha\dot{x}_2 \end{cases} \Rightarrow m\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_2 = -\alpha\dot{x}_2$$

oder $m\dot{x}_1 + M\dot{x}_2 = -\alpha x_2 + C$.

Aus den Anfangsbedingungen folgt $C = 0$.

Somit $\alpha x_2 = -m\dot{x}_1 - M\dot{x}_2$.

Am Ende des Prozesses sind $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$.

Somit ist $x_2 = 0$: Das Boot ist am Ende in derselben Lage wie am Anfang!