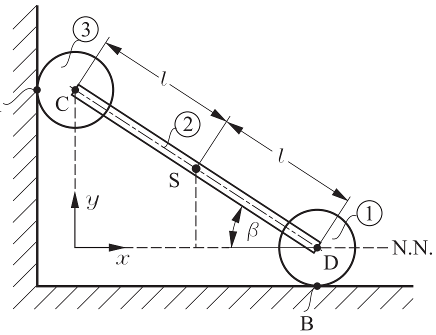
# Tutorium

### Aufgabe 85




Kinetische Energie: Der Momentanpol des oberen Rades ist A:

$$T_3 = \frac{1}{2} J_3^A \dot{\varphi}_3^2 = \frac{1}{2}\left(J_3 + m_3 r_3^2\right)\dot{\varphi}_3^2$$

B ist der Momentanpol des unteren Rades:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1^A \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2}\left(J_1 + m_1 r_1^2\right)\dot{\varphi}_1^2$$

Stange:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2\left(\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2\right) + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2$$

potentielle Energie: Das Nullniveau liegt um $r_1$ über dem Boden:

$$U_1 = 0\ ,\ U_2 = m_2 g y_S\ ,\ U_3 = m_3 g y_c$$

Kinematik: (Zur Erinnerung: gegeben sind $v_{sx}$ und $\beta$.) Vorgehen: Gewinne einfache geometrische Zusammenhänge zwischen den Koordinaten und leite dann ab!

Stange:

$$\begin{aligned}
x_S &= l\cos\beta & y_S &= l\sin\beta \\
\dot{x}_S &= v_{sx} = -l\dot{\beta}\sin\beta & \dot{y}_S &= l\dot{\beta}\cos\beta \\
\hookrightarrow \dot{\beta} &= -\frac{v_{sx}}{l\sin\beta} & \dot{y}_S &= -\frac{v_{sx}}{\tan\beta}
\end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \varphi_{2,0} - \beta \Rightarrow \dot{\varphi}_2 = -\dot{\beta} = \frac{v_{sx}}{l\sin\beta}$$

unteres Rad:

$$\begin{aligned}
x_D &= 2l\cos\beta & &\Rightarrow \dot{x}_D = -2l\dot{\beta}\sin\beta = 2v_{sx} \\
x_D &= \left(\varphi_{1,0} - \varphi_1\right) r_1 & &\Rightarrow \dot{x}_D = -r_1\dot{\varphi}_1 \Rightarrow \dot{\varphi}_1 = -\frac{2v_{sx}}{r_1}
\end{aligned}$$

oberes Rad:

$$\begin{aligned}
y_C &= 2l\sin\beta & &\Rightarrow \dot{y}_C = 2l\dot{\beta}\cos\beta = \frac{2v_{sx}}{\tan\beta} \\
y_C &= \left(\varphi_3 - \varphi_{3,0}\right) r_3 & &\Rightarrow \dot{y}_C = r_3\dot{\varphi}_3 \Rightarrow \dot{\varphi}_3 = -\frac{2v_{sx}}{r_3\tan\beta}
\end{aligned}$$

Ergebnis: (mit den in der Aufgabestellung gegebenen Vereinfachungen) Kinetische Energie:

$$T_{\text{ges}} = T_1 + T_2 + T_3 = v_{sx}^2\left(3m_1 + \frac{2m_2}{3\sin^2\beta} + \frac{3m_3}{\tan^2\beta}\right)$$

Potentielle Energie:

$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 + U_3 = (m_2 + 2m_3)lg\sin\beta$$

### Aufgabe 87

**(a)** Arbeitssatz:

$$A_0(t) = T(t) + U(t) - T_0 - U_0 \tag{1}$$

Ausgangszustand:

$$\begin{aligned}
T_0 &= 0 & &\text{Ruhe} \\
U_0 &= 0 & &\text{Feder entspannt bei } z = 0
\end{aligned}$$

Endzustand (zur Zeit $t$):

$$T(t) = \frac{1}{2}J^S\omega_1^2 + \frac{1}{2}J^S\omega_2^2 + \frac{1}{2}J^S\omega_3^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 \tag{2}$$

$$U(t) = \frac{1}{2}c\varphi^2 + mgz \tag{3}$$

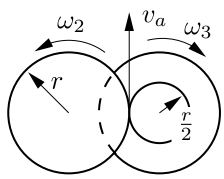
Der Antrieb hat vom Ausgangszustand bis zur Zeit $t$ folgende Arbeit geleistet:

$$A_0(t) = M_1\varphi_1$$

Kinematik:

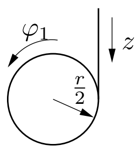
$$\omega_3 = -\frac{\dot{z}}{r} = \dot{\varphi}_3 \tag{4}$$

$$\text{mit } \varphi_3(0) = z(0) = 0 \quad \Rightarrow\ \varphi_3 = -\frac{z}{r} \tag{5}$$




$$\begin{aligned}
v_a &= \frac{r}{2}\omega_3 \\
v_a &= r\omega_2 \\
\hookrightarrow \omega_2 &= \frac{\omega_3}{2} = -\frac{\dot{z}}{2r}
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\text{mit } \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = 0\ \Rightarrow\ \varphi_2 = \frac{\varphi_3}{2} = -\frac{z}{2r}$$




$$\omega_1 = -\frac{2}{r}\dot{z} = \dot{\varphi}_1$$

$$\text{mit } \varphi_1(0) = z(0) = 0\ \Rightarrow\ \varphi_1 = -\frac{2}{r}z \tag{7}$$

Jetzt wird alles in den Arbeitssatz Gln. (1) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
M_1\left(-\frac{2}{r}z\right) &= \frac{J_S}{2}\left[\left(-\frac{2}{r}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right]\dot{z}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}c\left(-\frac{z}{2r}\right)^2 + mgz - 0
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{21}{8}\frac{J_S}{r^2} + \frac{m}{2}\right)\dot{z}^2 + \frac{1}{8}\frac{c}{r^2}z^2 + \left(\frac{2}{r}M_1 + mg\right)z = 0 \tag{8}$$

$M_1 = -M_a$ eingesetzt und nach $\dot{z}$ aufgelöst:

$$\dot{z} = \sqrt{-Az^2 + Bz} \tag{9}$$

$$A = \frac{c}{8Nr^2},\ B = \frac{1}{N}\left(\frac{2M_a}{r} - mg\right),\ N = \frac{21}{8}\frac{J_S}{r^2} + \frac{m}{2}$$

**(b)** Wenn die Masse $m$ maximal die Höhe $z_b$ erreicht, ist $\dot{z}_b$ dort Null. Aus Gleichung (8) wird mit $\dot{z}_b = 0$ und $M_1 = -M_b$

$$\frac{1}{8}\frac{c}{r^2}z_b^2 + \left(mg - \frac{2}{r}M_b\right)z_b = 0$$

$$\frac{1}{8}\frac{c}{r^2}z_b + mg = \frac{2}{r}M_b$$

$$\hookrightarrow M_b = \frac{1}{16}\frac{c}{r}z_b + \frac{rmg}{2} \tag{10}$$

**(c)** Gl. (8) lautet mit folgenden Abkürzugen:

$$\hat{m} = \frac{21}{4}\frac{J_S}{r^2} + m,\ \hat{c} = \frac{1}{4}\frac{c}{r^2},\ \hat{F} = -2\frac{M_1}{r} \tag{11}$$

$$\hookrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\hat{m}\dot{z}^2}_{T(t)} + \underbrace{\frac{1}{2}\hat{c}z^2 + mgz}_{U(t)} = \underbrace{\hat{F}z}_{A_0(t)} \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$\dot{T} = \underbrace{\hat{F}\dot{z} - mg\dot{z}}_{P_e} - \underbrace{\hat{c}z\dot{z}}_{P_i} \tag{12}$$

Gl. (12) ist der Leistungssatz: Die Änderung der kin. Energie eines Systems ist gleich der von außen zugeführten Leistung $P_e$ abzüglich der inneren Formänderungsleistung $P_i$.

Oder anders aufgelöst:

$$\left(\hat{m}\ddot{z} + \hat{c}z + mg - \hat{F}\right)\dot{z} = 0 \tag{13}$$

$$\Rightarrow \dot{z} = 0 \quad \vee \quad \hat{m}\ddot{z} + \hat{c}z = \hat{F} - mg \tag{14}$$

Der Arbeitssatz führt neben der zu erwartenden Differentialgleichung auch auf die (unphysikalische) Lösung, daß das System für immer stehen bleibt.

# Hausaufgaben

## Aufgabe 88

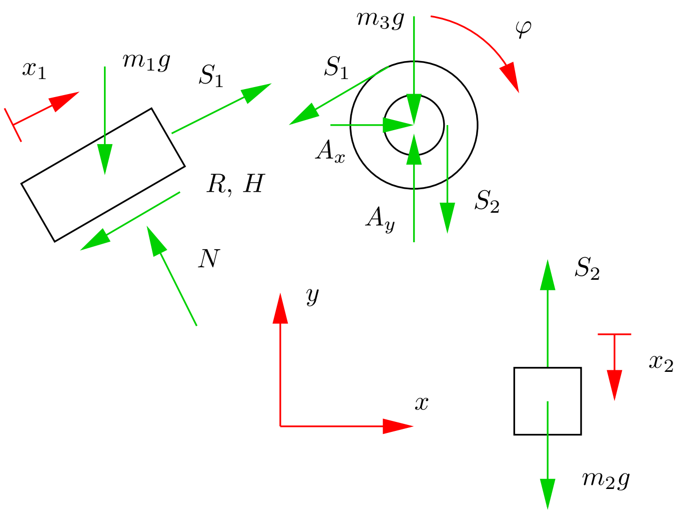
### (a)

Es soll der Bereich des Haftreibungskoeffizienten $\mu_0$ bestimmt werden, für den eine Bewegung des Systems noch stattfindet. Die obere Schranke für den Haftreibungskoeffizienten ist gerade durch die Bedingung

$$H = \mu_0 N$$

gegeben. Es gibt gerade noch Haften. Man kann daher statisch rechnen.

1. Freischneiden:




Impulssatz für $m_1$ (im statischen Fall Kräftegleichgewicht)

$$0 = S_1 - m_1 g \sin\alpha - H \tag{15}$$

$$0 = N - m_1 g \cos\alpha \tag{16}$$

Der Impulssatz für die Rolle erlaubt die Berechnung der Lagerkräfte, an denen wir aber nicht interessiert sind. Deshalb wird für die Rolle nur der Drehimpulssatz angeschrieben (im statischen Fall Momentengleichgewicht):

$$0 = -S_1 r_1 + S_2 r_2 \tag{17}$$

Impulssatz für $m_2$:

$$0 = m_2 g - S_2 \tag{18}$$

2. Gleichungssystem reduzieren:

Aus Gl. (17) folgt

$$S_1 = \frac{r_2}{r_1}S_2\ . \tag{19}$$

In Gl. (18) eingesetzt ergibt sich

$$S_1 = \frac{r_2}{r_1}m_2 g\ . \tag{20}$$

In Gl. (15) eingesetzt ergibt sich

$$H = g\left(\frac{r_2}{r_1}m_2 - m_1 \sin\alpha\right)\ . \tag{21}$$

Aus Gl. (16) erhalten wir

$$N = m_1 g \cos\alpha \ . \tag{22}$$

Damit sich die Masse $m_2$ nach unten bewegt, muß demnach gelten

$$\mu_0 \leq \left(\frac{r_2 m_2}{r_1 m_1} - \sin\alpha\right) \frac{1}{\cos\alpha} \ .$$

**(b)**

1. Kinematische Beziehung:

Aus

$$\varphi = \frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} \tag{23}$$

folgt für die Geschwindigkeiten

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{\dot{x}_2}{r_2}$$
$$\dot{x}_1 = \frac{r_1}{r_2}\dot{x}_2$$

2. Arbeitssatz

vom Ausgangszustand $(\cdot)_0$ bis zu einem Zustand zum Zeitpunkt $t$ lautet $W(t) = T(t) + U(t) - (T_0 + U_0)$, wobei $W$ die Arbeit der nichtkonservativen Kräfte ist. Die Reibkraft $\mu N = \mu m_1 g \cos\alpha$ (vgl. Gl. (22)) hat bis zum aktuellen Zustand zur Zeit $t$ die folgende Arbeit geleistet:

$$W(t) = -x_1(t)\mu m_1 g \cos\alpha = -x_2(t)\frac{r_1}{r_2}\mu m_1 g \cos\alpha \tag{24}$$

Der Arbeitssatz lautet dann:

$$\begin{aligned} -&\frac{r_1}{r_2}\mu m_1 g \cos\alpha x_2(t) \\ &= \frac{1}{2}\left(m_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + m_2 + \frac{\Theta^S}{r_2^2}\right)\dot{x}_2(t)^2 \\ &\quad + \left(m_1\frac{r_1}{r_2}\sin\alpha - m_2\right) g x_2(t) \end{aligned} \tag{25}$$

Da die Beschleunigung $\ddot{x}_2$ gesucht ist, wird der Arbeitssatz nach der Zeit abgeleitet. Solange sich die Masse nach unten bewegt, gilt $\dot{x}_2 \neq 0$, und man erhält das gesuchte Ergebnis

$$\ddot{x}_2 = g\frac{1 - \frac{m_1}{m_2}\frac{r_1}{r_2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{1 + \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \frac{\Theta^S}{m_2 r_2^2}} \ .$$

**(c)**

1. Kinematische Beziehung:

Man muß im folgenden zwei Zeitbereiche unterscheiden: vor dem Aufprall von $m_2$ und nach dem Aufprall. Vor dem Aufprall gelten die kinematischen Beziehungen aus Aufgabenteil (b). Wenn $m_2$ aufschlägt, hat $m_1$ die Strecke $s_1$ zurückgelegt:

$$s_1 = \frac{r_1}{r_2}h \ . \tag{26}$$

Die Beziehung zwischen $x_1$ und $x_2$ gilt nur bis zum Aufschlag von $m_2$, die zwischen $x_1$ und $\varphi$ dagegen darüber hinaus, weil die Rolle sich reibungsfrei dreht und deshalb nur von der Seilkraft abgebremst wird. Diese ist positiv (Seil gespannt), solange die Beschleunigung von $m_1$ nach links gerichtet ist.

2. Arbeitssatz

Auch der Arbeitssatz wurde bereits in Aufgabenteil (b) für die Bewegung vor dem Aufprall der Masse $m_2$ aufgestellt. Im Moment des Aufpralls gilt $x_2 = h$, und man erhält aus Gl. (25) die Geschwindigkeit von $m_2$ genau im Moment vor dem Aufprall von $m_2$ und daraus mit der kinematischen Beziehung die Geschwindigkeit der Masse $m_1$ genau im Moment vor dem Aufprall von $m_2$.

$$v_1 = \sqrt{2gh\frac{m_2 - m_1\frac{r_1}{r_2}(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{m_1 + m_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + \frac{\Theta^S}{r_1^2}}} \ . \tag{27}$$

Nun kann man noch den Arbeitssatz vom Moment des Auftreffens von $m_2$ bis zum Erreichen des höchsten Punktes von $m_1$ aufstellen:

$$-s_2\mu m_1 g \cos\alpha = m_1 g s_2 \sin\alpha - \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{\Theta^S}{r_1^2}\right)v_1^2$$

Hierbei bezeichnet $s_2$ den vom Moment des Auftreffens von $m_2$ bis zum bis zum Erreichen des höchsten Punktes von $m_1$ zurückgelegten Weg. Damit ergibt sich

$$s_2 = h\frac{\left(\frac{m_2}{m_1} - \frac{r_1}{r_2}(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)\right)\left(1 + \frac{\Theta^S}{m_1 r_1^2}\right)}{(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + \frac{\Theta^S}{m_1 r_1^2}\right)} \ .$$

Die gesuchte Rutschlänge ist $L = s_1 + s_2$:

$$L = h\frac{m_2}{m_1}\frac{m_1 r_1 r_2(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) + m_1 r_1^2 + \Theta^S}{(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \Theta^S)(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}$$

---

**Aufgabe 93**

Arbeitssatz:

$$T_2 + U_2 - T_1 - U_1 = \hat{W}_{12} \tag{28}$$

kin. und pot. Energie am Anfang:

$$T_1 = 0\,,\ U_1 = m_1 g y_S \tag{29}$$

kin. und pot. Energie am Ende:

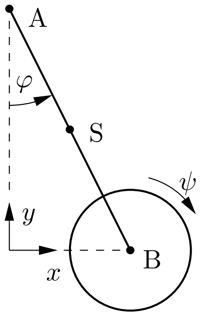
$$T_2 = \frac{1}{2}m_1 {v_{S2}}^2 + \frac{1}{2}J_1^S{\dot{\varphi}_2}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_{B2}}^2 + \frac{1}{2}J_2^B{\dot{\psi}_2}^2 \tag{30}$$
$$U_2 = 0 \tag{31}$$

Arbeit des Reibmoments:

$$W_{12} = -M_R\big[\varphi_2 + \psi_2 - (\varphi_1 + \psi_1)\big] \tag{32}$$

Kinematik:

$$x_A = 0 \quad (33)$$
$$y_A = L\cos\varphi \quad (34)$$
$$x_B = L\sin\varphi \quad (35)$$
$$y_B = 0 \quad (36)$$




$$\Rightarrow x_S = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{L}{2}\sin\varphi \quad (37)$$
$$\dot{x}_S = \frac{L}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi \quad (38)$$
$$y_S = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = \frac{L}{2}\cos\varphi \quad (39)$$
$$\dot{y}_S = -\frac{L}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi \quad (40)$$
$$\Rightarrow v_S = \sqrt{\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2} = \frac{L}{2}\dot{\varphi} \quad (41)$$
$$\Rightarrow v_B = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = \dot{x}_B = L\dot{\varphi}\cos\varphi \quad (42)$$
$$\Rightarrow v_A = |\dot{y}_A| = L\dot{\varphi}\sin\varphi \quad (43)$$
$$\Rightarrow \dot{\psi} = \frac{v_B}{r} = \frac{L}{r}\dot{\varphi}\cos\varphi \quad (44)$$
$$\psi = \frac{L}{r}\sin\varphi \quad (\text{mit } \varphi = 0 \Leftrightarrow \psi = 0) \quad (45)$$

Werte am Anfang:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6} \quad (46)$$
$$\psi_1 = \frac{L}{r}\sin\varphi_1 = \frac{1}{2}\frac{L}{r} \quad (47)$$
$$y_{S1} = \frac{L}{2}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}L \quad (48)$$

Werte am Ende:

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} \quad (49)$$
$$v_{A2} = |L\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2| = L\dot{\varphi}_2 \quad (50)$$
$$\Rightarrow \dot{\varphi}_2 = \frac{1}{L}v_{A2} \quad (51)$$
$$v_{S2} = \frac{L}{2}\dot{\varphi}_2 = \frac{1}{2}v_{A2} \quad (52)$$
$$v_{B2} = L\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2 = 0 \quad (53)$$
$$\dot{\psi}_2 = \frac{L}{r}\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2 = 0 \quad (54)$$
$$\psi_2 = \frac{L}{r}\sin\varphi_2 = \frac{L}{r} \quad (55)$$

alles eingesetzt in (28):

$$\frac{1}{2}m_1\frac{1}{4}{v_{A_2}}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m_1L^2\frac{1}{L^2}{v_{A2}}^2 - m_1gL\frac{\sqrt{3}}{4} = -M_R\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\frac{L}{r}\right] \quad (56)$$

$$\Rightarrow v_{A_2} = \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3}gL - \frac{M_R}{m_1}\left[2\pi + 3\frac{L}{r}\right]} \quad (57)$$