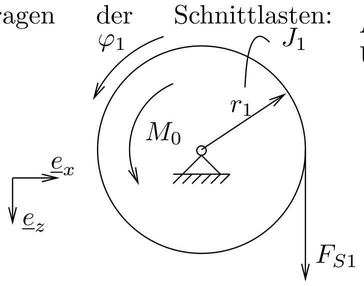
Tutorium

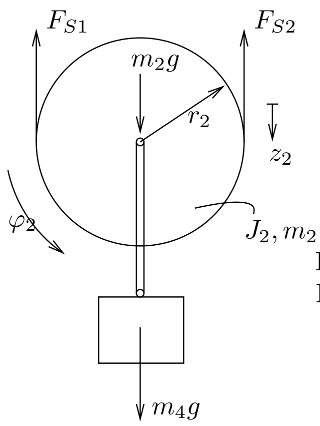
Aufgabe 108

(a)

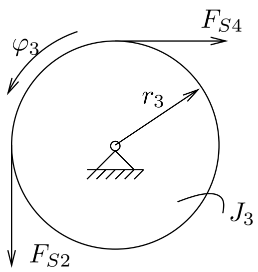
Freischneiden und Antragen der Schnittlasten: Freischnitt Rolle 1:



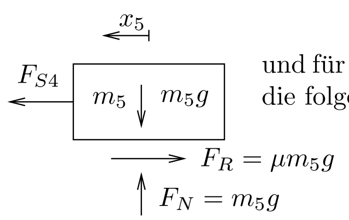
Freischnitt m_2 und m_4:



Freischnitt m_3:



Freischnitt m_5:



(b)

Man kann nun 5 Gleichungen für die 8 Unbekannten $\ddot{\varphi}_1, F_{S1}, \ddot{z}_2, \ddot{\varphi}_2, F_{S2}, \ddot{\varphi}_3, F_{S4}, \ddot{x}_5$ aufstellen

$$
\begin{aligned}
J_1\ddot{\varphi}_1 &= M_0 - F_{S1} r_1\\
J_2\ddot{\varphi}_2 &= (F_{S2} - F_{S1}) r_2\\
(m_2 + m_4)\ddot{z}_2 &= (m_2 + m_4) g - F_{S1} - F_{S2}\\
J_3\ddot{\varphi}_3 &= (F_{S2} - F_{S4}) r_3\\
m_5\ddot{x}_5 &= F_{S4} - R = F_{S4} - \mu m_5 g
\end{aligned}
$$

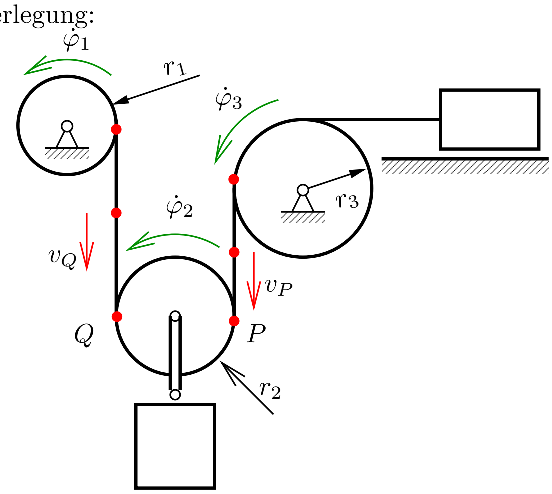
(c) Es folgen 3 kinematische Beziehungen, die sich mit Hilfe der Kontaktbedingungen und der EULERschen Geschwindigkeitsformel berechnen lassen.

$$\ddot{x}_5 = r_3\ddot{\varphi}_3 \tag{1}$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{1}{2}(r_3\ddot{\varphi}_3 - r_1\ddot{\varphi}_1) \tag{2}$$

$$-r_3\ddot{\varphi}_3 = r_1\ddot{\varphi}_1 + 2r_2\ddot{\varphi}_2 \tag{3}$$

Auf Gleichung (3) kommt man z.B. mit folgender Überlegung:



Die Geschwindigkeiten v_P und v_Q berechnen sich nach der EULERschen Formel für Scheibe 3 bzw. Scheibe 1 nach:

$$v_P = r_3\dot{\varphi}_3 \tag{4}$$

$$v_Q = -r_1\dot{\varphi}_1 \tag{5}$$

Zwischen v_P und v_Q gilt (da P und Q auf Scheibe 2 liegen):

$$v_Q = v_P + 2r_2\dot{\varphi}_2 \tag{6}$$

Setzt man nun (4) und (5) in (6) ein, so folgt (3).

Mit dem Massenträgheitsmoment für zylindrische Scheiben

$$J_S = \frac{1}{2} m r^2 \tag{7}$$

und für den Spezialfall nach Aufgabenstellung erhalten wir die folgenden 9 Gleichungen

$$
\begin{aligned}
J_S\ddot{\varphi}_1 &= M_0 - F_{S1} r\\
J_S\ddot{\varphi}_2 &= (F_{S2} - F_{S1}) r\\
(m + m)\ddot{z}_2 &= (m + m) g - F_{S1} - F_{S2}\\
J_S\ddot{\varphi}_3 &= (F_{S2} - F_{S4}) r\\
m\ddot{x}_5 &= F_{S4} - \mu m g\\
\ddot{x}_5 &= r\ddot{\varphi}_3\\
\ddot{z}_2 &= \frac{1}{2}(r\ddot{\varphi}_3 - r\ddot{\varphi}_1)\\
-r\ddot{\varphi}_3 &= r\ddot{\varphi}_1 + 2r\ddot{\varphi}_2\\
J_S &= \frac{1}{2} m r^2
\end{aligned}
$$

Dieses System kann man nun von-Hand oder mit einem Mathematikprogramm (Maple, Octave, ...) auflösen nach den zwei Unbekannten. Die Eingabedatei für Maple sieht z.B. so aus:

```
eqns := {\
T*p1=M_0-S1*r,\
```

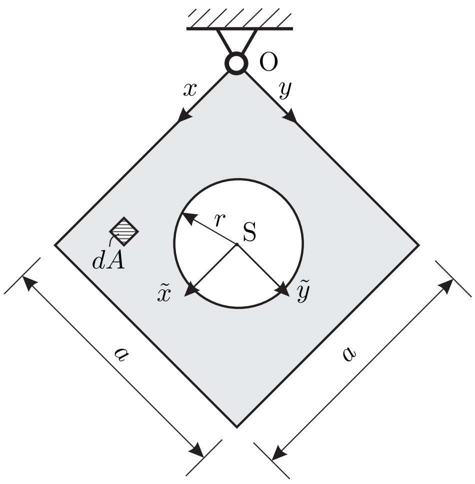
```
T*p2=(S2-S1)*r,\
(m+m)*z2=(m+m)*g-S1-S2,\
T*p3=(S2-S4)*r,\
m*x5=S4-mu*m*g,\
x5=r*p3,\
r*p1+2*r*p2=-r*p3,\
z2=0.5*(r*p3-r*p1),\
T=0.5*m*r*r};

sols := latex(\
solve( eqns, {p1,p2,p3,S1,S2,S4,z2,x5,T} )\
);
```

Die Lösung für z.B. $\ddot{\varphi}_1 =: p1$ sieht dann so aus:

$$p_1 = 0.05555555556\,\frac{-3.0\,r\mu\,mg + 17.0\,M_0 - 14.0\,rmg}{mr^2}$$

Aufgabe 132



Für die gezeigte, gelochte, quadratische Scheibe soll das (axiale) Massenträgheitsmoment bezüglich der $z-$Achse ermittelt werden. Diese weist im Ursprung O senkrecht aus der $x-y-$Ebene heraus. Dieses Massenträgheitsmoment ist wie folgt definiert:

$$\Theta^{zz} = \int \left(x^2 + y^2\right) dm \tag{8}$$

Da bei ebenen Bewegungen starrer Körper die Drehachse auf der Bewegungsebene senkrecht steht, wird meistens nur der Bezugspunkt angegeben, in welchem die Bezugsachse die Ebene durchstößt. Hier: $\Theta^{zz} =: \Theta^O$ bzw. $\Theta^{\tilde{z}\tilde{z}} =: \Theta^S$.

Bei zusammengesetzten Körpern wird das Gesamtmassenträgheitsmoment um die $z-$Achse durch Addition der Massenträgheitsmomente aller Teilkörper um diese Achse bestimmt. Bei der Addition wird ein Bestandteil als negative Größe betrachtet, wenn es bereits als Stück eines anderen Bestandteils berücksichtigt wurde. Daher gilt:

$$\Theta^O = \Theta^O_R - \Theta^O_K \tag{9}$$

wobei R das Rechteck und K den Kreis kennzeichnen.
Außerdem besitzt der Satz von Steiner (Parallelachsensatz) Gültigkeit, welcher einen Zusammenhang zwischen dem Massenträgheitsmoment eines Körpers um eine Achse durch den Schwerpunkt und eine andere dazu parallelen Achse angibt. Sei b Abstand der Achsen, dann gilt:

$$\Theta^O = \Theta^S + mb^2 \tag{10}$$

Bestimmen wir nun Θ^O_R mit Hilfe kartesischer Koordinaten:

$$\Theta^O_R = \int_{(m)} \left(x^2 + y^2\right) dm \tag{11}$$

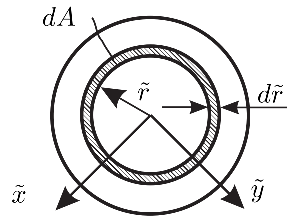
$$\text{mit} \qquad dm = \rho dV = \rho d dA = \rho d dx dy$$

Dicke d und Dichte ρ sind als konstant vorausgesetzt.

$$\begin{aligned}
\Theta^O_R &= \rho d \int_0^a \int_0^a \left(x^2 + y^2\right) dx dy \\
&= \rho d \int_0^a \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_0^a dy \\
&= \rho d \int_0^a \left(\frac{a^3}{3} + y^2 a\right) dy \\
&= \rho d \left[\frac{a^3}{3} y + \frac{y^3}{3} a\right]_0^a \\
&= \frac{2}{3} a^4 \rho d
\end{aligned}$$

Der Subtrahend in Gl.(9) wird mit Hilfe des Satzes von Steiner berechnet.

$$\Theta^O_K = \Theta^S_K + m_K b^2 \qquad \text{mit} \quad b = \frac{a}{\sqrt{2}} \tag{12}$$



$$\begin{aligned}
\Theta^S_K &= \int_{(m)} \left(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2\right) dm \qquad (13)\\
&= \int_{(m)} \tilde{r}^2 \rho d dA
\end{aligned}$$

$$\text{mit} \qquad dA = 2\pi \tilde{r} d\tilde{r}$$

$$\Theta^S_K = \rho d 2\pi \int_0^r \tilde{r}^3 d\tilde{r} = \frac{1}{2}\pi\rho d r^4$$

$$\Theta^S_K = \frac{1}{2} m_K r^2 \tag{14}$$

Die Masse der Kreisscheibe ist $m_K = \pi\rho d r^2$. (14) in (12) ergibt:

$$\begin{aligned}
\Theta^O_K &= \frac{1}{2}\pi\rho d r^4 + \rho\pi r^2 d \frac{a^2}{2} \qquad (15)\\
&= \frac{1}{2}\pi\rho d r^2 \left(r^2 + a^2\right)
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für θ_O:

$$\begin{aligned}
\Theta^O &= \frac{2}{3} a^4 \rho d - \frac{1}{2}\pi\rho d r^2 \left(r^2 + a^2\right) \\
&= \rho d \left[\frac{2}{3} a^4 - \frac{1}{2}\pi r^2 \left(r^2 + a^2\right)\right]
\end{aligned}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 112

Der Drallsatz für eine Punktmasse oder einen Punkthaufen kann erweitert werden auf räumlich ausgedehnte Körper. Für STARRKÖRPER (in einem Inertialsystem) mit (beliebig bewegtem) Schwerpunkt S lautet der Drallsatz für räumlich ausgedehnte Körper mit dem Drall(vektor) $\underline{\boldsymbol{L}} := \int(\underline{\boldsymbol{r}} \times \underline{\boldsymbol{v}})dm$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}^{\mathrm{S}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Theta}^{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{M}^{\mathrm{S}} \tag{16}$$

wobei $\boldsymbol{M}^{\mathrm{S}}$ die Summe aller äußeren Momente um S ist und $\boldsymbol{\Theta}^{\boldsymbol{S}}$ der Massenträgheitstensor um S.

Für einen in der EBENE bewegten Körper gilt dann:

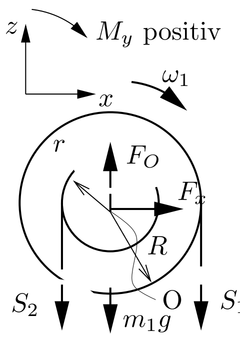
$$\frac{d}{dt}(\Theta^{S}\omega) = M^{\mathrm{S}} \tag{17}$$

Zur Aufgabe:

<u>Freischnitt obere Rolle:</u>

Drehimpulssatz um das Lager O der oberen Riemenscheibe:

$$\Theta_1^O\dot{\omega}_1 = S_1R - S_2r \tag{18}$$



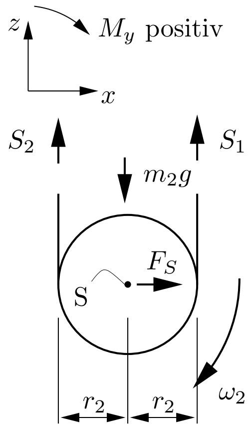
Der Impulssatz (zweites NEWTONsches Gesetz für den Schwerpunkt):

$$m_1\ddot{z}_1 = 0 = F_O - S_1 - S_2 - m_1g$$
$$m_1\ddot{x}_1 = 0 = F_x$$

bringt noch die zusätzlichen Unbekannten F_O und F_x, nach denen nicht gefragt ist, also netto keine zusätzliche Information.

<u>Freischnitt untere Rolle:</u>
Drehimpulssatz um den Punkt S mit $r_2 = \frac{r+R}{2}$:

$$\Theta_2^S\dot{\omega}_2 = S_2\frac{r+R}{2} - S_1\frac{r+R}{2} \tag{19}$$



Beschleunigung von S:

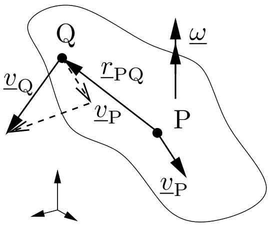
$$\underline{a}_{\mathrm{S}} = \underline{\dot{v}}_{\mathrm{S}} = \dot{v}_{\mathrm{S}}\underline{e}_z$$

Impulssatz, senkrechte Komponente:

$$m_2\dot{v}_{\mathrm{S}} = S_1 + S_2 - m_2g \tag{20}$$

<u>Kinematik:</u>
Wir haben nun die drei Gleichungen (18), (19) und (20), die aber insgesamt fünf Unbekannte (S_1, S_2, ω_1, v_{S} und ω_2) enthalten. Wir benötigen also zwei kinematische Zusatzbedingungen. Das System hat nur einen Freiheitsgrad, deshalb darf nur eine kinematische Größe übrigbleiben, die anderen müssen sich aus dieser einen ergeben.

Eulersche Bewegungsgleichung:



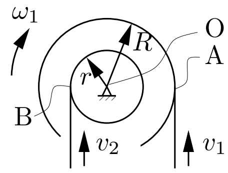
Für zwei Punkte P und Q auf einem mit der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ rotierenden starren Körper gilt

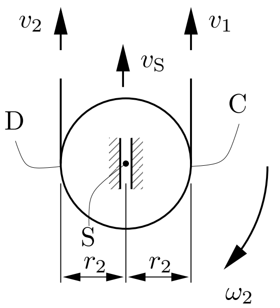
$$\underline{v}_{\mathrm{Q}} = \underline{v}_{\mathrm{P}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{\mathrm{PQ}} \tag{21}$$

Wir wollen nun alle kinematischen Größen durch die Winkelgeschwindigkeit ω_1 der oberen Scheibe ausdrücken.

Die Geschwindigkeit der beiden Seile errechnet sich mit Gleichung (21) zu:

$$v_1 = -R\omega_1 \tag{22}$$
$$v_2 = r\omega_1\ . \tag{23}$$





An der unteren Riemenscheibe erhält man mit $r_2 = \frac{r+R}{2}$ aus Gleichung (21):

$$v_1 = v_{\mathrm{S}} - \frac{r+R}{2}\omega_2 \tag{24}$$
$$v_2 = v_{\mathrm{S}} + \frac{r+R}{2}\omega_2\ . \tag{25}$$

Gleichungen (22) und (24) sowie (23) und (25) gleichgesetzt:

$$-R\omega_1 = v_{\mathrm{S}} - \frac{r+R}{2}\omega_2 \tag{26}$$
$$r\omega_1 = v_{\mathrm{S}} + \frac{r+R}{2}\omega_2\ . \tag{27}$$

Auch wenn A, B, C und D in jedem Moment andere materielle Punkte auf den Scheiben sind, gelten die Gln. (26) und (27) zu jedem Zeitpunkt t.[1]

Durch Addition bzw. Subtraktion dieser Gleichungen erhält man schließlich:

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{2}{r-R}v_{\mathrm{S}}\ . \tag{28}$$

Durch Differentiation von Gl. (28) nach der Zeit erhält man

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \frac{2}{r-R}\dot{v}_{\mathrm{S}}\ . \tag{29}$$

<u>Reduktion des Gleichungssystem</u>
Aus den Gleichungen (18), (19), (20) und (29) werden jetzt die Größen S_1, S_2, ω_1 und ω_2 eliminiert, so daß nur eine Gleichung für v_{S} übrigbleibt:

[1] Dagegen erhält man etwa aus Gl. (22) durch Differentiation nach der Zeit mitnichten die Beschleunigung der Punkte A oder C.

Gleichung (20):

$$S_1 = m_2\dot{v}_S - S_2 + m_2 g$$

wird eingesetzt in (18) und (19):

$$\Theta_1^O\dot{\omega}_1 = (m_2\dot{v}_S - S_2 + m_2 g)R - S_2 r \tag{30}$$

$$\Theta_2^S\dot{\omega}_2 = S_2\frac{r+R}{2} - (m_2\dot{v}_S - S_2 + m_2 g)\frac{r+R}{2}\ , \tag{31}$$

Durch Addition wird S_2 eliminiert:

$$\Theta_1^O\dot{\omega}_1 + \Theta_2^S\dot{\omega}_2 = \Big(m_2\dot{v}_S + m_2 g\Big)\Big(R - \frac{r+R}{2}\Big) \tag{32}$$

und mit (29) ergibt sich

$$(\Theta_1^O + \Theta_2^S)\frac{2}{r-R}\dot{v}_S = m_2 g\frac{R-r}{2} + m_2\frac{R-r}{2}\dot{v}_S$$

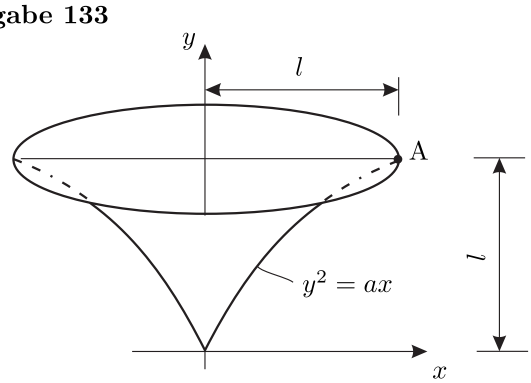
$$\hookrightarrow \dot{v}_S = -g\frac{m_2\left(\frac{R-r}{2}\right)^2}{\Theta_1^O + \Theta_2^S + m_2\left(\frac{R-r}{2}\right)^2} \tag{33}$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich durch Integration:

$$v_S = -g\frac{m_2\left(\frac{R-r}{2}\right)^2}{\Theta_1^O + \Theta_2^S + m_2\left(\frac{R-r}{2}\right)^2}t + v(t=0) \tag{34}$$

wobei $v(t=0)$ die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts ist.

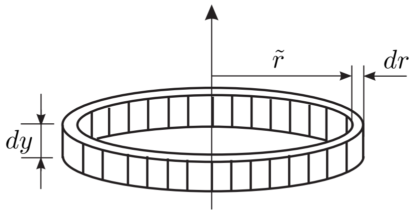
Aufgabe 133



Aus den Angaben in der Skizze soll zuerst der Parameter a ermittelt werden. Die Koordinaten des Punktes A lauten: $A = (l, l, 0)$. Diese werden zur Bestimmung des Paramters a herangezogen:

$$y(x=l) = l \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{al} = l \qquad \Rightarrow \qquad a = l \tag{35}$$

Zur Ermittlung von Θ^{yy} soll zunächst ein Kreisringelement genutzt werden.



$$dm = \rho dV = \rho 2\pi\tilde{r}d\tilde{r}dy$$

$$\Theta^{yy} = \int_m \left(x^2 + z^2\right)dm = \int_m \tilde{r}^2 dm \tag{36}$$

$$= 2\pi\rho\int_0^l\int_0^{r(y)}\tilde{r}^2\tilde{r}d\tilde{r}dy$$

$$= 2\pi\rho\int_0^l\left[\frac{1}{4}\tilde{r}^4\right]_0^{r(y)}dy \qquad \text{mit} \quad r(y) = \frac{y^2}{a}$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho\int_0^l\frac{y^8}{a^4}dy$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho\frac{l^9}{9a^4} \qquad \text{mit} \quad a = l$$

$$= \frac{1}{18}\pi\rho l^5 \tag{37}$$

Die Masse des Körpers:

$$m = \int_m dm = \int_0^l\int_0^{r(y)}2\pi\rho\tilde{r}d\tilde{r}dy$$

$$= 2\pi\rho\int_0^l\left[\frac{1}{2}\tilde{r}^2\right]_0^{\frac{y^2}{a}}dy$$

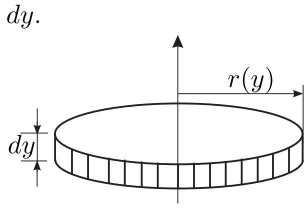
$$= \pi\rho\int_0^l\frac{y^4}{a^2}dy$$

$$= \frac{1}{5}\rho\pi l^3 \tag{38}$$

Die Gl.(37) ergibt mit der Gl.(38):

$$\Theta^{yy} = \frac{5}{18}\frac{1}{5}\pi\rho l^3 l^2 = \frac{5}{18}ml^2$$

<u>Alternativlösung:</u>
Eine weitere Möglichkeit Θ^{yy} zu bestimmen, liefert die Kenntnis des Massenträgheitsmomentes eines Scheibenelementes. Dieses hat jeweils den Radius $r(y)$ und die Dicke dy.



Dieses Element hat die Masse:

$$dm = \rho\pi r^2(y)dy \tag{39}$$

Das Massenträgheitsmoment für den Kreiszylinder ist bekannt:

$$\Theta^{yy} = \frac{1}{2}mR^2 \tag{40}$$

demnach ist:

$$d\Theta^{yy} = \frac{1}{2}dmr^2(y) = \frac{1}{2}\pi\rho r^4(y)dy = \frac{1}{2}\pi\rho\left(\frac{y^2}{a}\right)^4 dy \tag{41}$$

und somit das Massenträgheitsmoment:

$$\Theta^{yy} = \int_{\Theta^{yy}} d\Theta^{yy} = \rho\int_0^l\frac{1}{2}\pi\frac{y^8}{a^4}dy = \frac{1}{18}\pi\rho l^5 \tag{42}$$
