Tutorium

Aufgabe 30

(a) Im Kontaktpunkt A von Körper $\boxed{1}$ und Körper $\boxed{2}$ gilt reines Rollen, so dass beide Körper an dieser Stelle dieselbe Geschwindigkeit haben.

$$\underline{v}_A^{\boxed{2}} = \underline{v}_B + \underline{\omega}_2 \times \underline{d}_{BA} \tag{1}$$

$$\underline{v}_A^{\boxed{1}} = -v_1 \underline{e}_x \tag{2}$$

$$\underline{v}_A^{\boxed{2}} = \underline{v}_A^{\boxed{1}} \tag{3}$$

wobei $\underline{d}_{BA}$ der Vektor von B nach A ist. Wegen $\underline{v}_B = \underline{0}$ ist daher

$$\begin{pmatrix} -v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3r \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

damit folgt die Winkelgeschwindigkeit:

$$\boxed{\omega_2 = -\frac{v_1}{3r}} \tag{5}$$

Um ω_3 zu berechnen, benötigen wir zunächst die Geschwindigkeiten der Punkte C und D. Auf Körper $\boxed{2}$ gilt:

$$\underline{v}_C^{\boxed{2}} = \underline{v}_B + \underline{\omega}_2 \times \underline{d}_{BC} \tag{6}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{v_1}{3r} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6r \\ 6r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_C^{\boxed{2}} = 2v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Körper $\boxed{3}$ hat bei C dieselbe Geschwindigkeit wie Körper $\boxed{2}$

$$\underline{v}_C^{\boxed{2}} = \underline{v}_C^{\boxed{3}} \tag{8}$$

und die Geschwindigkeit von D auf Körper $\boxed{3}$ ist

$$\underline{v}_D^{\boxed{3}} = v_D^{\boxed{3}} \underline{e}_x \tag{9}$$

Eulersche Formel auf Körper $\boxed{3}$ zwischen C und D

$$\underline{v}_D^{\boxed{3}} = \underline{v}_C^{\boxed{3}} + \underline{\omega}_3 \times \underline{d}_{CD} \tag{10}$$

Einsetzen von (7), (8) und (9) in (10) liefert

$$\begin{pmatrix} v_D^{\boxed{3}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 16r \\ -9r \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Wertet man von dieser vektorwertigen Gleichung die zweite Komponente aus, so ergibt sich:

$$\boxed{\omega_3 = -\frac{v_1}{8r}} \tag{12}$$

Und dies eingesetzt in die Auswertung der ersten Komponente von (11) ergibt:

$$v_D^{\boxed{3}} = \frac{7}{8} v_1 \tag{13}$$

Die Relativgeschwindigkeit $v_{D,rel}$ errechnet sich aus:

$$v_{D,rel} = |\underline{v}_D^{\boxed{3}} - \underline{v}_D^{\boxed{1}}| \tag{14}$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \frac{7}{8} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \tag{15}$$

$$v_{D,rel} = \frac{15}{8} v_1 \tag{16}$$

(b) Die Winkelgeschwindigkeit von Körper $\boxed{2}$ beträgt wie oben gezeigt:

$$\underline{\omega}_2 = \omega_2 \underline{e}_z \tag{17}$$

$$= -\frac{v_1}{3r} \underline{e}_z \tag{18}$$

Dies ist die Winkelgeschwindigkeit zum betrachteten Zeitpunkt. Es kann jedoch auch die Funktion angegeben werden, die den zeitlichen Verlauf von $\underline{\omega}_2$, nämlich $\underline{\omega}_2(t)$ beschreibt. Diese ist:

$$\underline{\omega}_2(t) = \omega_2(t) \underline{e}_z \tag{19}$$

$$= -\frac{v_1(t)}{3r} \underline{e}_z \tag{20}$$

Dabei ist $v_1(t)$ eine <u>unbekannte</u> Zeitfunktion. Allerdings wissen wir, dass zum betrachteten Zeitpunkt gilt:

$$\frac{d}{dt} v_1(t) = a_1 \tag{21}$$

so dass wir für die gesuchte Winkelbeschleunigung finden:

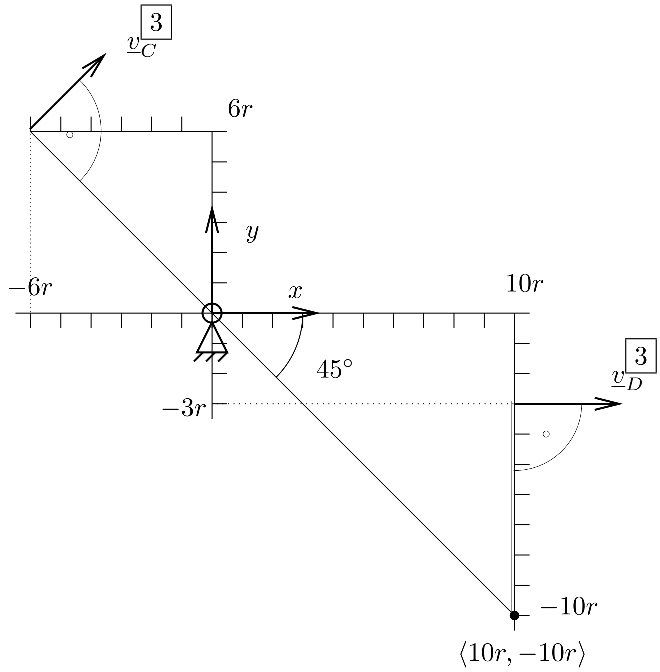
$$\dot{\underline{\omega}}_2(t) = \left(-\frac{v_1(t)}{3r} \underline{e}_z \right)^{\cdot} \tag{22}$$

$$= -\frac{\dot{v}_1(t)}{3r} \underline{e}_z \tag{23}$$

$$= -\frac{1}{3r} a_1 \underline{e}_z \tag{24}$$

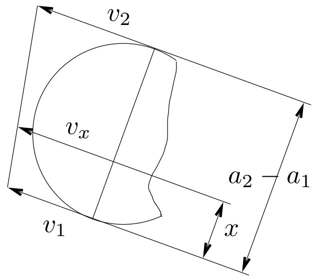
$$\Rightarrow \quad \dot{\omega}_2 = -\frac{1}{3r} a_1 \tag{25}$$

(c) Die Konstruktion des Momentanpols geschieht, in dem man an zwei Punkten des betreffenden Körpers (hier $\boxed{3}$), an denen die Geschwindigkeit bekannt ist (hier C und D) Lote an die Geschwindigkeitsvektoren zeichnet. Diese Lote schneiden sich hier am Momentanpol. Der Körper $\boxed{3}$ führt zum betrachteten Zeitpunkt eine reine Drehung um diesen Pol aus.



Es folgt wie oben:

$$\begin{aligned}\underline{v}_2 &= \underline{0} + \underline{\omega}_2 \times a_2 \underline{e}_r \\ &= a_2 \omega_2 \underline{e}_\varphi\end{aligned}$$



Kennt man die Geschwindigkeiten zweier Punkte eines Starrkörpers, so können die Geschwindigkeiten der Punkte auf der Geraden zwischen den 2 Punkten durch lineare Interpolation berechnet werden. Speziell hier gilt: $\underline{v}_x = \underline{v}_1 + \frac{x}{a_2 - a_1}(\underline{v}_2 - \underline{v}_1)$.

Der Mittelpunkt des Planetenrades bewegt sich also mit der Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}\underline{v} &= \underline{v}_1 + \frac{1}{2}(\underline{v}_2 - \underline{v}_1) = \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \\ |\underline{v}| = v &= \frac{1}{2}|\underline{v}_1 + \underline{v}_2| \\ v &= \frac{1}{2}\sqrt{(a_1\omega_1 + a_2\omega_2)^2} \\ &= \frac{1}{2}(a_1\omega_1 + a_2\omega_2)\end{aligned}$$

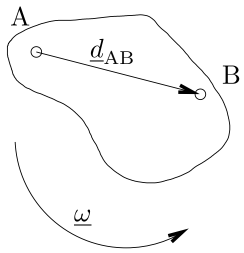
(b) Eulersche Formel auf dem Planetenrad

$$\begin{aligned}\underline{v}_2 &= \underline{v}_1 + \underline{\omega} \times (a_2 - a_1)\underline{e}_r \\ (a_2\omega_2 - a_1\omega_1)\underline{e}_\varphi &= \omega \underline{e}_z \times (a_2 - a_1)\underline{e}_r \\ \omega &= \frac{a_2\omega_2 - a_1\omega_1}{a_2 - a_1}\end{aligned}$$

(c) Die Geschwindigkeit des Planetenradträgers ist an einem Punkt bekannt, nämlich muss sie mit der des Planetenradmittelpunkts übereinstimmen. Daher gilt:

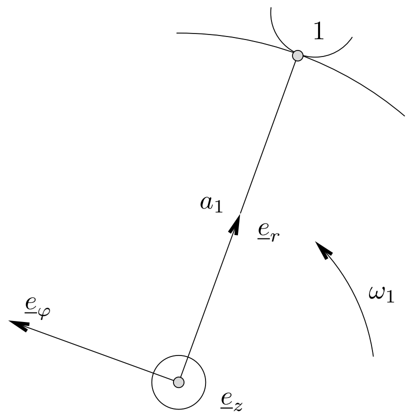
$$\begin{aligned}v\underline{e}_\varphi &= \underline{\omega}^* \times \frac{a_1 + a_2}{2}\underline{e}_r \\ \omega^* &= \frac{2v}{a_1 + a_2} \\ &= \frac{a_1\omega_1 + a_2\omega_2}{a_1 + a_2}\end{aligned}$$

Aufgabe 33



Seien A und B Punkte eines starren Körpers und $\underline{\omega}$ seine Winkelgeschwindigkeit. Dann gilt die Eulersche Geschwindigkeitsformel $\underline{v}_\mathrm{B} = \underline{v}_\mathrm{A} + \underline{\omega} \times \underline{d}_\mathrm{AB}$.

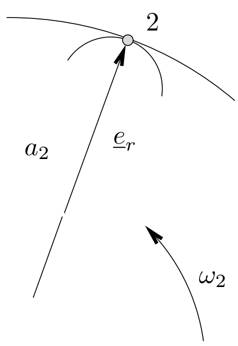
(a)



1 ist ein Punkt auf dem Rand des Sonnenrads. Er hat dieselbe Geschwindigkeit wie ein Punkt des Planetenrads, der zum betrachteten Zeitpunkt an derselben Stelle ist (reines Rollen).

Die Eulersche Geschwindigkeitsformel liefert:

$$\begin{aligned}\underline{v}_1 &= \underline{0} + \underline{\omega}_1 \times a_1 \underline{e}_r \\ &= \omega_1 \underline{e}_z \times a_1 \underline{e}_r \\ &= a_1 \omega_1 \underline{e}_\varphi\end{aligned}$$



2 ist ein Punkt auf dem Innenrand des Hohlrads. Er hat dieselbe Geschwindigkeit wie ein Punkt des Planetenrads, der zum betrachteten Zeitpunkt an derselben Stelle ist (reines Rollen).

Hausaufgaben

Aufgabe 27

(a)

Die EULERsche Formel wird zweimal benutzt: Einmal auf Körper $\boxed{3}$ zwischen den Punkten A und C. Und einmal auf Körper $\boxed{2}$ zwischen den Punkten B und C.

$$\underline{v}_C^{\boxed{3}} = \underline{v}_A^{\boxed{3}} + \underline{\omega}_3 \times (-3R\underline{e}_x) \tag{26}$$
$$\underline{v}_C^{\boxed{2}} = \underline{v}_B^{\boxed{2}} + \underline{\omega}_2 \times (-2R\underline{e}_x) \tag{27}$$

Da $\underline{v}_A^{\boxed{3}} = \underline{v}_B^{\boxed{2}} = \underline{0}$ ist, wird aus (26) und (27)

$$\underline{v}_C^{\boxed{3}} = \underline{\omega}_3 \times (-3R\underline{e}_x) \tag{28}$$
$$\underline{v}_C^{\boxed{2}} = \underline{\omega}_2 \times (-2R\underline{e}_x) \tag{29}$$

Da C sowohl auf $\boxed{3}$ als auch auf $\boxed{2}$ liegt, gilt

$$\underline{v}_C^{\boxed{3}} = \underline{v}_C^{\boxed{2}} \tag{30}$$

und daher ist:

$$-3R\omega_3\underline{e}_y = -2R\omega_2\underline{e}_y$$
$$\omega_2 = \frac{3}{2}\omega_3 \tag{31}$$

(b)

Zuerst wird die Geschwindigkeit von D auf $\boxed{2}$ berechnet durch Auswertung der EULERschen Geschwindigkeitsformel zwischen B und D:

$$\underline{v}_D^{\boxed{2}} = \underline{v}_B^{\boxed{2}} + \underline{\omega}_2 \times (-3R\underline{e}_x) \tag{32}$$
$$= \omega_2\underline{e}_z \times (-3R\underline{e}_x) \tag{33}$$
$$= -\omega_2 3R\underline{e}_y \tag{34}$$

Die Geschwindigkeit $\underline{v}_D^{\boxed{4}}$ des Punktes D auf $\boxed{4}$ berechnet man durch die EULERschen Geschwindigkeitsformel zwischen E und D:

$$\underline{v}_D^{\boxed{4}} = \underline{v}_E^{\boxed{4}} + \underline{\omega}_4 \times (-4R\underline{e}_x - 4R\underline{e}_y) \tag{35}$$

Benutzt man nun noch, dass

$$\underline{v}_E^{\boxed{4}} = \underline{v}_E^{\boxed{3}} \tag{36}$$
$$= -\omega_3 4R\underline{e}_x \tag{37}$$

dann ergibt sich

$$\underline{v}_D^{\boxed{4}} = (-4R\omega_3 + 4R\omega_4)\underline{e}_x - 4R\omega_4\underline{e}_y \tag{38}$$

Da der Stift auf $\boxed{2}$ bei D in der Schiebehülse $\boxed{4}$ sich nur in Hülsenrichtung bewegen kann, sind die Geschwindigkeiten von $\boxed{4}$ und $\boxed{2}$ senkrecht zur Hülsenrichtung gleich:

$$\underline{v}_D^{\boxed{4}} \cdot \underline{n} = \underline{v}_D^{\boxed{2}} \cdot \underline{n} \tag{39}$$
$$\text{mit} \quad \underline{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{e}_y \tag{40}$$

Daraus ergibt sich:

$$\underline{v}_D^{\boxed{4}} \cdot \underline{n} = 4R\left[(-\omega_3 + \omega_4)\,\underline{e}_x - \omega_4\underline{e}_y\right] \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\underline{e}_x - \underline{e}_y\right] \tag{41}$$
$$= 2\sqrt{2}R\,(-\omega_3 + 2\omega_4) \tag{42}$$
$$\underline{v}_D^{\boxed{2}} \cdot \underline{n} = -3R\omega_2\underline{e}_y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\underline{e}_x - \underline{e}_y\right] \tag{43}$$
$$= +\frac{3\sqrt{2}}{2}R\omega 2 \tag{44}$$
$$\Rightarrow -4\omega_3 + 8\omega_4 = 3\omega_2 \tag{45}$$

Setzt man nun noch (31) ein, dass ist

$$-4\omega_3 + 8\omega_4 = 3\frac{3}{2}\omega_3 \tag{46}$$
$$8\omega_4 = \left(\frac{9}{2} + \frac{8}{2}\right)\omega_3 \tag{47}$$
$$\omega_4 = \frac{17}{16}\omega_3 \tag{48}$$

(c)

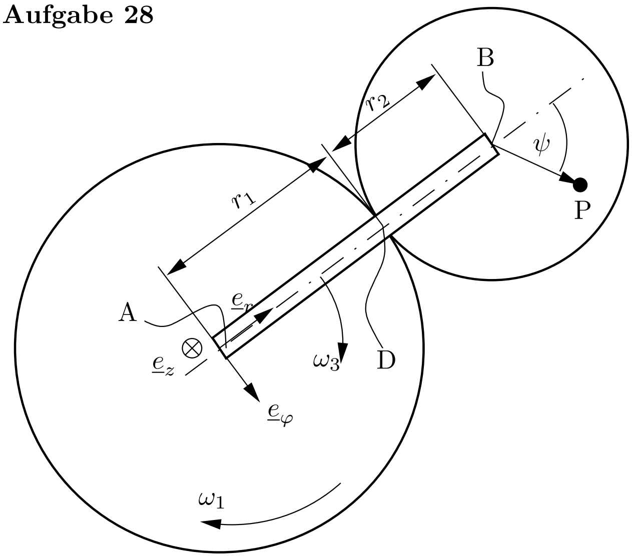
Es ist $v_{D,rel} = |\underline{v}_D^{\boxed{4}} - \underline{v}_D^{\boxed{2}}|$ zu ermitteln. Daher setzt man (31) und (48) in (34) und (38) ein und kommt auf:

$$\underline{v}_D^{\boxed{2}} = -\frac{9}{2}R\omega_3\underline{e}_y \tag{49}$$
$$= \frac{1}{4}R\omega_3(-18\underline{e}_y) \tag{50}$$
$$\underline{v}_D^{\boxed{4}} = \left(-4R\omega_3 + 4R\frac{17}{16}\omega_3\right)\underline{e}_x - 4R\frac{17}{16}\omega_3\underline{e}_y \tag{51}$$
$$= R\omega_3\left[(-4 + \frac{17}{4})\underline{e}_x - \frac{17}{4}\underline{e}_y\right] \tag{52}$$
$$= R\omega_3\left[\frac{1}{4}\underline{e}_x - \frac{17}{4}\underline{e}_y\right] \tag{53}$$
$$= \frac{1}{4}R\omega_3(\underline{e}_x - 17\underline{e}_y) \tag{54}$$

Damit ergibt sich:

$$v_{D,rel} = |\underline{v}_D^{\boxed{4}} - \underline{v}_D^{\boxed{2}}| \tag{55}$$
$$= |\frac{1}{4}R\omega_3(\underline{e}_x + \underline{e}_y)| \tag{56}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}R\omega_3 \tag{57}$$

Aufgabe 28



1. Geschwindigkeit v_B des Planetenradmittelpunktes:

$$\underline{v}_B^{\boxed{3}} = \underline{\omega}_3 \times \underline{AB} = \omega_3(r_1+r_2)\underline{e}_z \times \underline{e}_r = \omega_3(r_1+r_2)\underline{e}_\varphi \quad (58)$$

$$\underline{v}_B^{\boxed{3}} = \underline{v}_B^{\boxed{2}} \qquad \text{Gelenk!} \quad (59)$$

2. Winkelgeschwindigkeit des Planetenrades ω_2:

$$\underline{v}_D^{\boxed{1}} = \underline{\omega}_1 \times \underline{AD}$$

$$\underline{v}_D^{\boxed{2}} = \underline{v}_B^{\boxed{2}} + \underline{\omega}_2 \times \underline{BD}$$

Bei reinem Rollen ist $\underline{v}_D^{\boxed{1}} = \underline{v}_D^{\boxed{2}}$:

$$\begin{aligned}\underline{\omega}_1 \times \underline{AD} &= \underline{v}_B^{\boxed{2}} + \underline{\omega}_2 \times \underline{BD} \\ &= \underline{\omega}_3 \times \underline{AB} + \underline{\omega}_2 \times \underline{BD} \\ \omega_1 r_1 \underline{e}_z \times \underline{e}_r &= \omega_3(r_1+r_2)\underline{e}_z \times \underline{e}_r + \omega_2(-r_2)\underline{e}_z \times \underline{e}_r \\ \omega_1 r_1 \underline{e}_\varphi &= \omega_3(r_1+r_2)\underline{e}_\varphi - \omega_2 r_2 \underline{e}_\varphi \\ \omega_2 &= \omega_3 + \frac{r_1}{r_2}\big(\omega_3 - \omega_1\big) \quad (60)\end{aligned}$$

3. Geschwindigkeitsvektor des Punktes P:

$$\begin{aligned}\underline{v}_P^{\boxed{2}} &= \underline{v}_B^{\boxed{2}} + \underline{\omega}_2 \times \underline{BP} \\ &= \omega_3(r_1+r_2)\underline{e}_\varphi + \omega_2 \underline{e}_z \times a\big(\cos\psi\,\underline{e}_r + \sin\psi\,\underline{e}_\varphi\big) \\ &= \Big[-a\sin\psi\big(\omega_3 + r_1/r_2(\omega_3-\omega_1)\big)\Big]\underline{e}_r \\ &+ \Big[\omega_3(r_1+r_2) + a\cos\psi\big(\omega_3 + r_1/r_2(\omega_3-\omega_1)\big)\Big]\underline{e}_\varphi\end{aligned}$$