# Tutorium

### Aufgabe 90

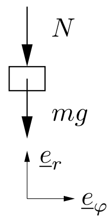
**(a)**Der Energieerhaltungssatz von A nach C liefert die Federkonstante $c$ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit im Punkt C:

$$T_A + U_A = T_C + U_C \tag{1}$$

$$0 + \frac{1}{2}c\Delta s^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + 2mgR$$

$$c = \frac{m}{\Delta s^2}v_C^2 + \frac{4mgR}{\Delta s^2} \tag{2}$$

Die Geschwindigkeit $v_C$ bekommen wir aus dem 2. NEWTONschen Gesetz für die Masse $m$ im Punkt C.




$$ma_r = -N - mg \tag{3}$$

Im Grenzfall des gerade noch nicht Herunterfallens gilt $N = 0$

$$ma_r = -mg \qquad \text{bzw.} \qquad a_r = -g \tag{4}$$

Radiale Komponente der Beschleunigung bei der Kreisbewegung:

$$a_r = -R\dot{\varphi}^2 \tag{5}$$

Zudem erhält man aus

$$\underline{v} = R\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi \qquad \Rightarrow v_C^2 = R^2\dot{\varphi}_C^2 \tag{6}$$

Mit Gl. (4), (5) und (6)

$$v_C^2 = gR \tag{7}$$

Alles eingesetzt überführt (2) auf das gesuchte Ergebnis

$$c = \frac{5mgR}{\Delta s^2} \tag{8}$$

**(b)** Der Arbeitssatz von A nach F

$$(T_F + U_F) - (T_A + U_A) = W_{A-F} \tag{9}$$

$$-mgh + mgL\sin\alpha - \frac{1}{2}c\Delta s^2 = W_{A-F} \tag{10}$$

Die Arbeit:

$$W_{A-F} = -F_{R_1}b - F_{R_2}L \tag{11}$$

$$F_{R_1} = \mu_1 mg \tag{12}$$

$$F_{R_2} = \mu_2 mg\cos\alpha \tag{13}$$

$$W_{A-F} = -\mu_1 mgb - \mu_2 mgL\cos\alpha \tag{14}$$

Die Arbeit in die Gl.(10) einsetzen:

$$-mgh + mgL\sin\alpha - \frac{1}{2}c\Delta s^2 = -\mu_1 mgb - \mu_2 mgL\cos\alpha \tag{15}$$

Gleichung nach $L$ umstellen und nach kurzer Rechnung erhalten wir

$$L = \frac{mg\,(h - \mu_1 b) + \frac{1}{2}c\Delta s^2}{mg\,(\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha)} \tag{16}$$

---

# Hausaufgaben

### Aufgabe 106

Es handelt sich um ein energieerhaltendes, dissipationsfreies System, d.h. es gilt der Energiesatz.

**(a)**

$$T_A + U_A = T_B + U_B$$

T: kinetische Energie, U: potentielle Energie

Es gilt hier:

$$T_A = \frac{m}{2}v_A^2,\ U_A = mgh,\ T_B = \frac{m}{2}v_B^2,\ U_B = 0$$

also:

$$\frac{m}{2}v_A^2 + mgh = \frac{m}{2}v_B^2 \iff \frac{v_A^2}{2} + gh = \frac{v_B^2}{2}$$

dann ist:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$$

**(b)** es gilt wieder:

$$T_B + U_B = T_C + U_C$$

mit

$$T_B = \frac{m}{2}v_B^2,\ U_B = 0,\ T_C = 0,\ U_C = \frac{c}{2}(\Delta l)^2$$

Beachte: Federkraft ist ebenfalls eine konservative Kraft, d.h. es existiert eine Potentialfunktion für die Federkraft.

$$\frac{m}{2}v_B^2 = \frac{c}{2}(\Delta l)^2$$

mit

$$\Delta l = \sqrt{\frac{mv_B^2}{c}}$$

d.h.

$$\Delta l = \sqrt{\frac{m}{c}[v_A^2 + 2gh]}$$

## Aufgabe 86

**(a)** $v_B = ?,\quad v_C = ?$

Energieerhaltundssatz von A nach B:

$$T_A + U_A = T_B + U_B \tag{17}$$

$$T_A = 0 \quad \text{(Masse bewegt sich nicht)} \tag{18}$$

$$U_A = mgH + \frac{1}{2}c\Delta s^2 \tag{19}$$

$$T_B = \frac{v_B^2\, m}{2},\quad U_B = 0 \quad \text{(Nullniveau)} \tag{20}$$

Gleichungen (18), (19) und (20) in (17) einsetzen:

$$mgH + \frac{1}{2}c\Delta s^2 = v_B^2 \frac{m}{2} \quad \Big| \cdot \frac{2}{m} \tag{21}$$

$$2gH + \frac{c}{m}\Delta s^2 = v_B^2 \tag{22}$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{2gH + \frac{c}{m}\Delta s^2}} \tag{23}$$

Energieerhaltungssatz von A nach C:

$$T_A + U_A = T_C + U_C \tag{24}$$

$T_A$ und $U_A$ ist schon oben bestimmt:

$$T_C = \frac{1}{2}mv_C^2\,,\quad U_C = mga \quad \Rightarrow \text{alles einsetzen} \tag{25}$$

$$mgH + \frac{1}{2}c\Delta s^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mga \quad \Big| \cdot \frac{2}{m} \tag{26}$$

$$2gH + \frac{c}{m}\Delta s^2 = v_C^2 + 2ga \tag{27}$$

$$v_C^2 = 2gH - 2ga + \frac{c}{m}\Delta s^2 \tag{28}$$

$$\boxed{v_C = \sqrt{2g(H-a) + \frac{c}{m}\Delta s^2}} \tag{29}$$

**(b)** Bremsweg $L = ?$

Arbeitssatz von A nach D:

$$\big(T_D + U_D\big) - \big(T_A + U_A\big) = W_{AD} \tag{30}$$

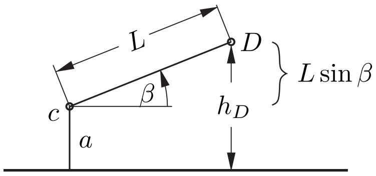
$W_{AD}$ - ges. Arbeit zwischen den beiden Punkten.

$T_A$, $U_A -$ bekannt

$$T_D = 0 \quad \text{(weil zum Stillstand)} \tag{31}$$

$$U_D = mgh_D \tag{32}$$

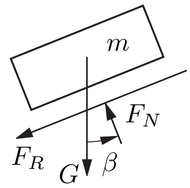
Bestimmen von $h_D$:




$$\boxed{h_D = a + L\sin\beta}$$

Bestimmen von geleisteter Arbeit:

$$W_{AD} = -F_R\, L$$
$$F_R = \mu F_N$$
$$F_N = mg\cos\beta$$




$$\boxed{W_{AD} = -\mu mgL\cos\beta} \tag{33}$$

alles in (30) einsetzen

$$mg\big(a + L\sin\beta\big) - mgH - \frac{1}{2}c\Delta s^2 = -\mu mgL\cos\beta \quad \Big| \cdot \frac{2}{mg}$$

$$2a + 2L\sin\beta - 2H - \frac{c}{mg}\Delta s^2 = -2\mu L\cos\beta$$
$$2L\sin\beta + 2\mu L\cos\beta = 2H - 2a + \frac{c}{mg}\Delta s^2$$
$$L\big(2\sin\beta + 2\mu\cos\beta\big) = 2H - 2a + \frac{c}{mg}\Delta s^2$$

$$\boxed{L = \frac{2(H-a) + \frac{c}{mg}\Delta s^2}{2\big(\sin\beta + \mu\cos\beta\big)}} \tag{34}$$