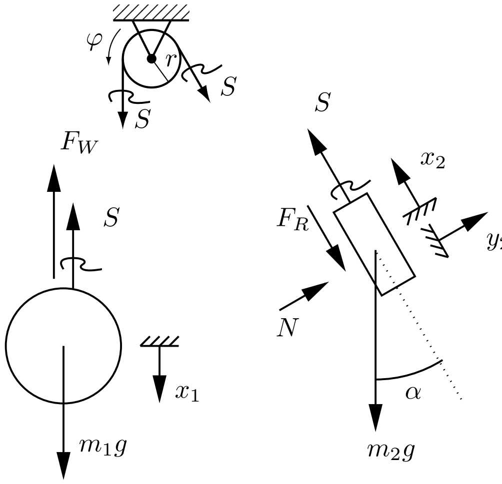
Tutorium

Aufgabe 41

Freischnitt



2. Newtonsches Gesetz:

$$\text{Kugel, x-Richtung:} \quad m_1\ddot{x} = m_1 g - S - F_W \tag{1}$$
$$\text{Körper, y-Richtung:} \quad 0 = N - m_2 g \sin\alpha \tag{2}$$
$$\text{Körper, x-Richtung:} \quad m_2\ddot{x} = S - m_2 g\cos\alpha - F_R \tag{3}$$

Reib- und Widerstandsgesetz
viskose Reibung:
Die Richtung der Reibungskraft F_W wurde schon in Gl. (1) berücksichtigt.

$$\rightarrow |F_W| = k\dot{x}_1 \tag{4}$$
$$\Rightarrow m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - S - k\dot{x}_1 \tag{5}$$

trockene Reibung:

$$F_R = \mu N \tag{6}$$
$$\text{mit (2): } F_R = \mu m_2 g \sin\alpha \tag{7}$$
$$\Rightarrow m_2\ddot{x}_2 = S - m_2 g\cos\alpha - \mu m_2 g \sin\alpha \tag{8}$$

Kinematische Beziehung zwischen x_1 und x_2: Seil und Umlenkrolle nicht dehnbar und masselos

$$x_1 = r\varphi = x_2 = x \tag{9}$$
$$\dot{x}_1 = r\dot{\varphi} = \dot{x}_2 = \dot{x} \tag{10}$$
$$\ddot{x}_1 = r\ddot{\varphi} = \ddot{x}_2 = \ddot{x} \tag{11}$$

Gleichung (10) und (11) in Gleichung (5) und (8):

$$m_1\ddot{x} = m_1 g - S - k\dot{x} \tag{12}$$
$$m_2\ddot{x} = S - m_2 g\cos\alpha - \mu m_2 g \sin\alpha \tag{13}$$

Eliminieren der unbekannten Seilkraft durch Addition von Gl. (12) und (13) und Formulierung in Normalform:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} = m_1 g - m_2 g\cos\alpha - \mu m_2 g\sin\alpha - k\dot{x} \tag{14}$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{m_1 + m_2}(m_2\cos\alpha + \mu m_2 \sin\alpha - m_1) + \frac{k}{m_1 + m_2}\dot{x} = 0 \tag{15}$$

$$\Longrightarrow \ddot{x} + A\dot{x} + B = 0 \tag{16}$$
$$\text{mit } A := \frac{k}{m_1 + m_2} \tag{17}$$
$$B := \frac{g}{m_1 + m_2}(m_2\cos\alpha + \mu m_2\sin\alpha - m_1) \tag{18}$$

Die DGL (16) kann analytisch durch Substitution und Integration gelöst werden. Es werden gleich die Randbedingungen $x(t = 0) = 0$ und $v(t = 0) = 0$ benutzt:

$$\ddot{x} = -A\dot{x} - B$$

$$\text{Subst.: } \dot{x} = v \tag{19}$$
$$\rightarrow \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = -Av - B \tag{20}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{dv}{Av + B} = dt \tag{21}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{A}\int_{v=0}^{v=v(t)} \left(\tilde{v} + \frac{B}{A}\right)^{-1} d\tilde{v} = \int_{t=0}^{t} d\tilde{t} \tag{22}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{A}\left[\ln\left(\tilde{v} + \frac{B}{A}\right)\right]_{v=0}^{v=v(t)} = t \tag{23}$$
$$\Leftrightarrow \left[\ln\left(v + \frac{B}{A}\right) - \ln\left(\frac{B}{A}\right)\right] = -At \tag{24}$$
$$\Leftrightarrow \ln\left[\frac{\left(v + \frac{B}{A}\right)}{\left(\frac{B}{A}\right)}\right] = \ln\left(v\frac{A}{B} + 1\right) = -At \tag{25}$$
$$\Leftrightarrow v\frac{A}{B} + 1 = e^{-At} \tag{26}$$
$$\Leftrightarrow v = \frac{B}{A}\left(e^{-At} - 1\right) \tag{27}$$
$$\text{Subst.: } v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \tag{28}$$
$$\rightarrow \int_{x=0}^{x=x(t)} d\tilde{x} = \int_{t=0}^{t} v\, d\tilde{t} \tag{29}$$
$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{B}{A}\int_{t=0}^{t}\left(e^{-A\tilde{t}} - 1\right) d\tilde{t} \tag{30}$$
$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{B}{A}\left[-\frac{1}{A}\left(e^{-At} - 1\right) - t\right] \tag{31}$$
$$\Leftrightarrow x(t) = -\frac{B}{A^2}e^{-At} + \frac{B}{A^2} - \frac{B}{A}t \tag{32}$$

Nun müssen noch die Definitionen (17) und (18) eingesetzt werden und dann ist die Lage der Kugel zu jedem beliebigem Zeitpunkt t mit den gegebenen Größen bestimmt.

Aufgabe 60

Beide Fahrzeuge rutschen nach dem Stoß mit der selben Geschwindigkeit v_0. Außerdem werden beide Autos als Massenpunkte aufgefasst.

(a) Nun lässt sich der Impulssatz in x- und y-Richtung aufstellen. Im Moment des Aufpralls wirken in guter Näherung keine äußeren Kräfte; daher ist der Impuls vor dem Stoß gleich dem nach dem Stoß.

Impuls in x-Richtung:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos\alpha = \big(m_1 + m_2\big) v_0 \cos\beta \tag{33}$$

Impuls in y-Richtung:

$$m_2 v_2 \sin\alpha = \big(m_1 + m_2\big) v_0 \sin\beta \tag{34}$$

Indem die beiden Formeln dividiert werden erhält man für den gesuchten Winkel β:

$$\tan\beta = \frac{m_2 v_2 \sin\alpha}{m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos\alpha}$$

(b) Zur Bestimmung der Rutschstrecke wird das zweite Newtonsche Gesetz in Rutschrichtung gebildet:

$$-\mu\big(m_1 + m_2\big) g = \big(m_1 + m_2\big) a \quad .$$

Für die Beschleunigung gilt also

$$a = -\mu g \quad . \tag{35}$$

Durch Trennung der Variablen erhält man

$$\int_{v_0}^{0} v dv = \int_{0}^{X_R} -\mu g ds$$

und schließlich

$$X_R = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

(c) Zur Ermittlung der Geschwindigkeit der beiden Autos vor dem Zusammenstoß wird die Impulserhaltung aus Aufgabenteil (a) herangezogen.

Zuerst wird v_2 mit der Gleichung in y-Richtung (34) ermittelt:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{m_1 + m_2}{m_2} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} v_0 \\ &= 15\sqrt{2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 76 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

Mit der Gleichung in x-Richtung (33) kann man nun v_1 berechnen:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 - \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} v_2 \\ &= 30\big(\sqrt{3} - 1\big)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 79 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

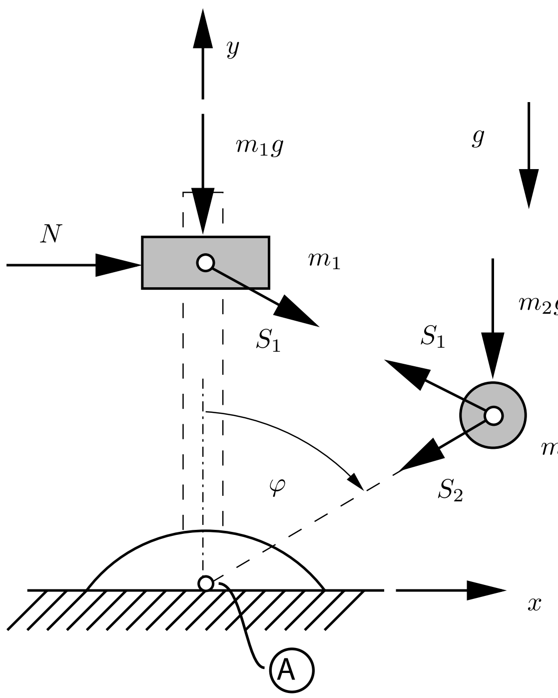
Die Geschwindigkeit des Golf betrug also 79 km/h, die des Mercedes 76 km/h.

Hausaufgaben

Aufgabe 56

Das System hat einen Freiheitsgrad.

Der Körper 1 bewegt sich in einer Führung in vertikaler Richtung. Für das Aufstellen der Bewegungsgleichung kann man ihn daher wie eine Punktmasse behandeln. Die Lage des Körpers 1 wird mit der Koordinate s beschrieben (siehe Abbildung). Die Punktmasse 2 bewegt sich auf einer Kreisbahn um den Punkt A. Daher soll die Bewegung der Punktmasse 2 in Polarkoordinaten r, φ beschrieben werden.



Beide Stäbe übertragen nur Kräfte in Stabrichtung. Das Newtonsche Grundgesetz in φ-Richtung lautet dann für die Punktmasse 2

$$-S_1 \sin 2\varphi + m_2 g \sin\varphi = m_2 l \ddot{\varphi}\ . \tag{36}$$

Für den Körper 1 liefert das Newtonsche Grundgesetz in vertikaler Richtung

$$-m_1 g - S_1 \cos\varphi = m_1 \ddot{s}\ . \tag{37}$$

Eliminieren der Stabkraft S_1 aus den Gleichungen (36) und (37) und Einsetzen der kinematischen Beziehung

$$s = 2l\cos\varphi$$

liefert die gesuchte Bewegungsdifferentialgleichung

$$\begin{aligned} \big(4m_1 \sin^2\varphi + m_2\big)\,\ddot{\varphi} + \left(4m_1 \sin\varphi\cos\varphi\right)\dot{\varphi}^2 \\ -\frac{g}{l}\sin\varphi\,(2m_1 + m_2) = 0\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 59

Da keine äußeren Kräfte am System angreifen, bleibt der Gesamtimpuls erhalten. D.h. der Impuls vor der Explosion gleicht dem Impuls nach der Explosion. Da der Impuls eine vektorwertige Größe ist, müssen auch seine Komponenten (z.B. für eine kartesische Basis) erhalten bleiben. Es gilt also in horizontaler und in vertikaler Richtung (mit den Abkürzungen $\cos(.) =: c_{(.)}$, $\sin(.) =: s_{(.)}$ und $\tan(.) =: t_{(.)}$):

$$mv_0 = m_2 v_2 c_{\alpha_2} \tag{38}$$
$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 s_{\alpha_2} \tag{39}$$

Außerdem soll die Masse während der Explosion erhalten bleiben:

$$m = m_1 + m_2 \tag{40}$$

Diese drei Gleichungen sind die Bestimmungsgleichungen für die drei gesuchten Größen m_1, m_2 und v_2.

Aus (38) und (39) ergibt sich:

$$v_2 = \frac{mv_0}{m_2 c_{\alpha_2}} \tag{41}$$
$$m_1 = m - m_2 \tag{42}$$

(41) und (42) können in (39) eingesetzt werden. Es folgt:

$$0 = (m - m_2)v_1 - mv_0 t_{\alpha_2}$$
$$\boxed{m_2 = m(1 - \frac{v_0}{v_1} t_{\alpha_2})}$$

m_2 wird nun in (40) und anschließend in (38) eingesetzt und man erhält:

$$\boxed{m_1 = m\frac{v_0}{v_1} t_{\alpha_2}}$$

und

$$mv_0 = m(1 - \frac{v_0}{v_1} t_{\alpha_2}) v_2 c_{\alpha_2}$$
$$\boxed{v_2 = \frac{v_0}{c_{\alpha_2} - v_0/v_1 s_{\alpha_2}}}$$