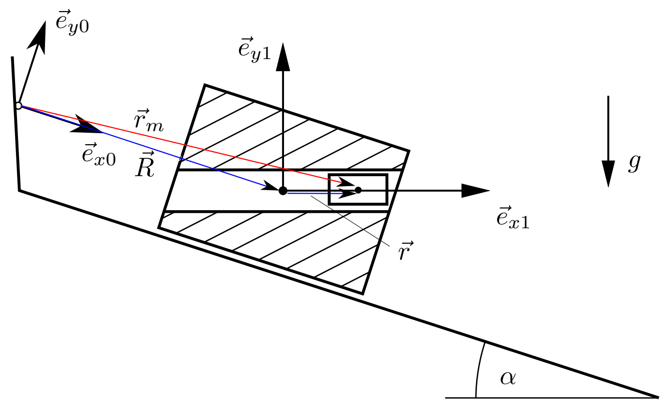
Tutorium

Aufgabe 37

Beide Körper führen eine reine Translationsbewegung aus. Die Bewegung wird mit zwei Koordinaten beschrieben: s und x. Die Koordinate x beschreibt die Bewegung der Masse m relativ zum starren Körper (Masse M). Beim Aufstellen der Gleichgewichtsbedingung am Massepunkt bzw. beim Schwerpunktsatz (starrer Körper) ist später darauf zu achten, dass tatsächlich mit der Absolutbeschleunigung gerechnet wird. Für die entspannte Lage der Federn gilt $s = 0$ und $x = 0$.



Der Ortsvektor der kleinen Masse ist

$$\vec{r}_m = \vec{R} + \vec{r} \tag{1}$$
$$\vec{r}_m = s(t)\cdot\vec{e}_{x0} + x(t)\cdot\vec{e}_{x1} \tag{2}$$

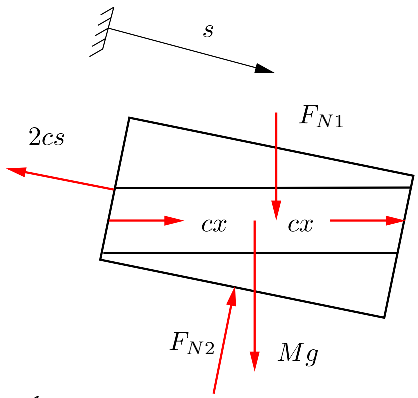
Dieser Ortvektor muss in Abhängigkeit der gewählten Koordinaten aufgestellt werden (wie hier geschehen). Aus diesem lassen sich durch differenzieren die Beschleunigungen der kleiner Masse ermitteln. Beachte, dass das Körperfeste Koordinatensystem $\vec{e}_{x1} - \vec{e}_{y1}$ zwar beschleunigt ist, aber die Verdrehung gegenüber dem Raumfesten $\vec{e}_{x0} - \vec{e}_{y0}$ konstant, d.h. $\dot{\varphi} = 0$. (Als Alternative könnte auch der $\vec{e}_{x1}$ Vektor mit Hilfe der Drehmatrix in der Raumfesten Basis $\vec{e}_{x0} - \vec{e}_{y0}$ dargestellt werden und anschließend die Ableitung des Ortsvektors in bekannter Weise vorgenommen werden.)

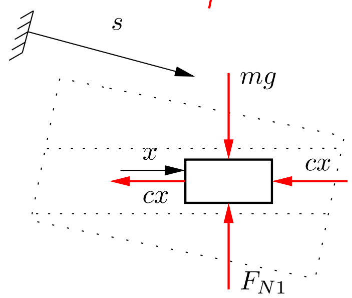
$$\ddot{\vec{r}}_m = \ddot{s}(t)\cdot\vec{e}_{x0} + \ddot{x}(t)\cdot\vec{e}_{x1} \tag{3}$$

Durch Multiplikation mit der Masse m lassen sich die Trägheitskräfte ermitteln.

$$m\ddot{\vec{r}}_m = m\ddot{s}\cdot\vec{e}_{x0} + m\ddot{x}\cdot\vec{e}_{x1} \tag{4}$$

Beachte, dass die Trägheitskraft der kleinen Masse ein Anteil in $\vec{e}_{x0}$ und ein Anteil in $\vec{e}_{x1}$ hat. Dies ist beim Freischnitt nach d'Alembert zu beachten.





Beim Freischneiden werden die Systeme (Körper) von einander isoliert. ("Die Masse m weiß nun nix mehr von der Masse M"). Sie merken nur die Wechselwirkung F_{N1}.
Aus dem Freikörperbild liest man für die Masse m ab

$$m\,(\ddot{x} + \ddot{s}\cos\alpha) = -2cx\ , \tag{5}$$
$$-m\ddot{s}\sin\alpha = F_{N1} - mg\ . \tag{6}$$

Für den starren Körper (Masse M) erhält man

$$M\ddot{s} = -2cs + (Mg + F_{N1})\sin\alpha + 2cx\cos\alpha\ .$$

Eliminieren der Kraft F_{N1} und Umformen führt auf die gesuchten Bewegungsdifferentialgleichungen

$$m\,(\ddot{x} + \ddot{s}\cos\alpha) + 2cx = 0\ , \tag{7}$$
$$\left(M + m\sin^2\alpha\right)\ddot{s} + 2c\,(s - x\cos\alpha) = (M + m)\,g\sin\alpha\ . \tag{8}$$

Aufgabe 52

Allgemein gilt

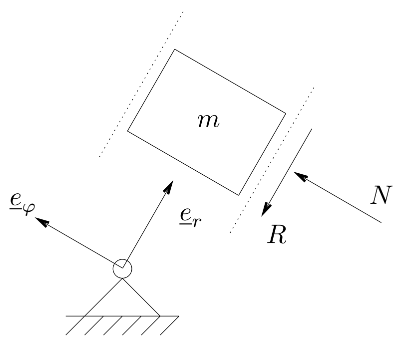
$$\dot{\underline{e}}_r = \dot{\varphi}\underline{e}_\varphi$$
$$\dot{\underline{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\underline{e}_r$$

Mit $\underline{r} = r(t)\underline{e}_r$ folgt

$$\underline{a} = \ddot{\underline{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\underline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\underline{e}_\varphi$$

Da $\dot{\varphi} = \omega = const$, ist $\ddot{\varphi} = 0$ und es folgt:

$$\underline{a} = \ddot{\underline{r}} = (\ddot{r} - r\omega^2)\underline{e}_r + 2\dot{r}\omega\underline{e}_\varphi$$



Freischnitt für beliebig ausgelenkte Lage: Die Widerstandskraft wirkt entgegen der Bewegung. Dass die Bewegung tatsächlich nach außen gerichtet ist ($\dot{r} > 0$), muß später nochmals überprüft werden.

Das 2. NEWTONsche Gesetz angewendet auf die Masse lautet

$$m\ddot{\underline{r}} = -R\underline{e}_r + N\underline{e}_\varphi$$

Das Kraftgesetz für die Reibkraft (Coulomb) lautet

$$R = \mu N$$

Es folgt durch Einsetzen

$$m((\ddot{r} - r\omega^2)\underline{e}_r + 2\dot{r}\omega\underline{e}_\varphi) = -\mu N\underline{e}_r + N\underline{e}_\varphi$$

Die Vektorgleichung kann skalar mit den Basisvektoren multipliziert werden, und man erhält zwei Gleichungen

$$m(\ddot{r} - r\omega^2) = -\mu N$$
$$2m\dot{r}\omega = N$$

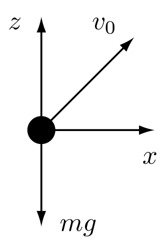
Diese letzten beiden Gleichungen können ineinander eingesetzt werden, und es ergibt sich die gesuchte Differentialgleichung (die Bewegungsgleichung)

$$\ddot{r} + 2\mu\omega\dot{r} - \omega^2 r = 0 \quad .$$

Die Bewegung für $t > 0$ ist für $r(0) > 0$ und $\dot{r}(0) = 0$ tatsächlich durch $\dot{r} > 0$ charakterisiert.

Aufgabe 36

(a)



Bewegungsgleichung in kartesischen Koordinaten lautet:

$$m\ddot{x} = 0 \qquad m\ddot{z} = -mg \tag{9}$$

Zweifache Integration führt nach Kürzen von m auf:

$$\dot{x} = c_1 \qquad \dot{z} = -gt + c_3 \tag{10}$$
$$x = c_1 t + c_2 \qquad z = -g\frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4 \tag{11}$$

Integrationskonstanten folgen aus den Anfangsbedingungen:

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha \quad \Rightarrow c_1 = v_0 \cos\alpha \tag{12}$$
$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow c_2 = 0 \tag{13}$$
$$\dot{z}(0) = v_0 \sin\alpha \quad \Rightarrow c_3 = v_0 \sin\alpha \tag{14}$$
$$z(0) = 0 \quad \Rightarrow c_4 = 0 \tag{15}$$

Einsetzen:

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha \qquad \dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha \tag{16}$$
$$x = v_0 \cos\alpha t \qquad z = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha t \tag{17}$$

Elimination der Zeit:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \tag{18}$$

Einsetzen in (17);

$$z(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \tag{19}$$
$$z(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + x\tan\alpha \tag{20}$$

Bedingung $\quad z(d) = h \quad$ einsetzen:

$$h = -\frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + d\tan\alpha \tag{21}$$

$$\frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2 t} = d\tan\alpha - h \quad \Big| \cdot \frac{v_0^2}{(d\tan\alpha - h)} \tag{22}$$

$$v_0^2 = \frac{gd^2}{2\cos^2\alpha(d\tan\alpha - h)} \tag{23}$$
$$v_0 = \frac{d\sqrt{g}}{\cos\alpha\sqrt{2(d\tan\alpha - h)}} \tag{24}$$

(b) Wie in der Aufgabe berechnet, ergibt sich für die Flugbahn eine "Wurfparabel": Es ist der Mindestabstand gesucht bei errechneter Abwurfgeschwindigkeit v_0. Gleichung (20):

$$z(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + x\tan\alpha \tag{25}$$

Gleichung (23) in (20):

$$z(x) = \frac{-g2\cos^2\alpha(d\tan\alpha - h)}{2\cos^2\alpha \cdot gd^2}x^2 + x\tan\alpha \tag{26}$$
$$z(x) = \frac{h - d\tan\alpha}{d^2}x^2 + x\tan\alpha \tag{27}$$

Der höchste Punkt muss vor dem Treffen in den Korb erreicht sein. Andernfalls würde der Ball von unten durch den Korb geworfen. Dies bedeutet aber auch, dass die Steigung der Tangente an die Bahnkurve des Balles (Massenpunktes) beim Erreichen des Korbes negativ sein muss. Daher fordern wir

$$\left.\frac{\mathrm{d}z(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=d} = \frac{2(h - d\tan\alpha)}{d^2}d + \tan\alpha \overset{!}{<} 0, \tag{28}$$

was nach einfacher Umformung auf

$$d > \frac{2h}{\tan\alpha} \tag{29}$$

führt.

So ergibt sich beispielsweise für $\quad \alpha = 45° \quad \Rightarrow \quad d > 2h$.

Hausaufgaben

Aufgabe 38

Lösung über 2. Newtonschen Gesetz in x-und y-Richtung, sowie unbestimmte Integration:

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{z} = -g \tag{30}$$
$$\dot{x} = C_1 \qquad \dot{z} = -gt + C_3 \tag{31}$$
$$x = C_1 x + C_2 \qquad z = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4 \quad . \tag{32}$$

Mit den Anfangsbedingungen in x-und z-Richtung:

$$\dot{x}(t_0) = v_0 \cdot \cos\alpha = C_1 \qquad \dot{z}(t_0) = v_0 \sin\alpha = C_3 \tag{33}$$
$$x(t_0) = 0 = C_2 \qquad z(t_0) = 0 = C_4 \tag{34}$$

ergeben sich:

$$\underline{x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t} \tag{35}$$
$$\underline{z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha t} \tag{36}$$

Umstellen von Gleichung (35) nach t:

$$\underline{t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}} \tag{37}$$

und einsetzen in Gleichung (36) ergibt die Flugbahn $z(x)$

$$\underline{z(x) = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha \cdot x} \tag{38}$$

Einsetzen der geometrischen Bedingungen in Gleichung (38) ergibt:

$$\underline{z(x_1) = h = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x_1^2 + \tan\alpha \cdot x_1} \tag{39}$$
$$\underline{z(3x_1) = h = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot (3x_1)^2 + \tan\alpha \cdot 3x_1} \tag{40}$$

Diese Gleichungen enthalten v_0 und α als Unbekannte.
Das Gleichungssystem wird nun wie folgt gelöst.
Aus (39) erhält man:

$$\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha} \cdot x_1^2 = \tan\alpha \cdot x_1 - h \tag{41}$$

aus (40) folgt:

$$\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha} \cdot 9x_1^2 = \tan\alpha \cdot 3x_1 - h \tag{42}$$

Division von (41):(42) ergibt:

$$\underline{\frac{1}{9} = \frac{\tan\alpha \cdot x_1 - h}{\tan\alpha \cdot 3x_1 - h}} \tag{43}$$

Umstellen nach α ergibt:

$$\underline{\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{h}{x_1}\right)} \tag{44}$$

Mit dem gegebenen Zusammenhang:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{\tan^2\alpha + 1} \tag{45}$$

ergibt sich aus Gleichung (39)

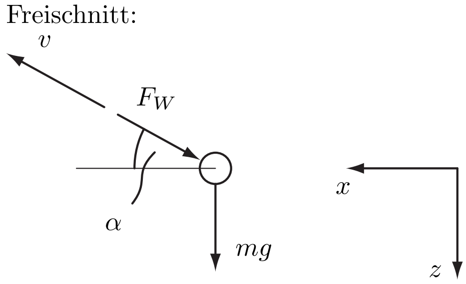
$$\underline{\frac{1}{3}h = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2} \cdot x_1^2 \cdot \left(\frac{16}{9} \cdot \frac{h^2}{x_1^2} + 1\right)} \tag{46}$$

und schließlich umgestellt nach v_0:

$$\underline{\underline{v_0 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{h} \cdot \left(\frac{16}{3} \cdot h^2 + 3x_1^2\right)}}} \tag{47}$$

Aufgabe 40

Freischnitt:



Widerstandskraft:

$$\underline{F}_W = \begin{Bmatrix} F_{Wx} \\ F_{Wz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_W\cos\alpha \\ F_W \sin\alpha \end{Bmatrix} \tag{48}$$

Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{x} = -F_W \cos\alpha \tag{49}$$
$$m\ddot{z} = mg + F_W \sin\alpha \tag{50}$$

Komponenten der Geschwindigkeit:

$$\dot{x} = v\cos\alpha \tag{51}$$
$$\dot{z} = -v\sin\alpha \tag{52}$$

Mit $F_W = kv$ und Gleichung (51) in (49) bzw. (52) in (50):

$$m\ddot{x} = -kv\cos\alpha = -k\dot{x} \tag{53}$$
$$m\ddot{z} = k\underbrace{v\sin\alpha}_{=-\dot{z}} + mg = -k\dot{z} + mg \tag{54}$$

Kinematik:

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} \tag{55}$$
$$\ddot{z} = \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} \tag{56}$$

Gleichung (55) in (53):

$$m\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = -k\dot{x} \tag{57}$$

Gleichung (56) in (54):

$$m\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} = -k\dot{z} + mg \tag{58}$$

Trennen der Veränderlichen:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\dot{x}} = -\frac{k}{m}\mathrm{d}t \tag{59}$$

$$\mathrm{d}\dot{z} = \left(g - \frac{k}{m}\dot{z}\right)\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}\dot{z} = -\frac{k}{m}\left(\dot{z} - \frac{mg}{k}\right)\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\dot{z} - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}\mathrm{d}t \tag{60}$$

allg.:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \to \ln x \tag{61}$$

Integration:

$$\ln \dot{x} = -\frac{k}{m}t + C_1 \tag{62}$$

$$\ln\left(\dot{z} - \frac{mg}{k}\right) = -\frac{k}{m}t + C_2 \quad |e^{(\;)} \tag{63}$$

Anfangsbedingungen:

Aus (62) folgt:

$$\dot{x}(t) = e^{\left(-\frac{kt}{m} + C_1\right)}$$
$$\dot{x}(t) = e^{-\frac{kt}{m}} \cdot e^{C_1}$$
$$\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha_0 = e^{C_1}$$
$$\dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha_0 e^{-\frac{kt}{m}}$$

Aus (63) folgt:

$$\dot{z}(t) - \frac{mg}{k} = e^{\left(-\frac{k}{m}t + C_2\right)}$$
$$\dot{z}(t) = e^{-\frac{k}{m}t} \cdot e^{C_2} + \frac{mg}{k}$$
$$\dot{z}(0) = e^{C_2} + \frac{mg}{k} = -v_0 \sin\alpha$$
$$e^{C_2} = -v_0 \sin\alpha - \frac{mg}{k}$$
$$\dot{z}(t) = \frac{mg}{k} - \left(\frac{mg}{k} + v_0 \sin\alpha_0\right)e^{-\frac{kt}{m}}$$

Horizontalkomponente des Weges:

$$x(t) = -\frac{m}{k}v_0 \cos\alpha_0 e^{-\frac{kt}{m}} + C_3$$

Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0$$
$$\Rightarrow \quad C_3 = \frac{m}{k}v_0 \cos\alpha_0$$

Einsetzen liefert:

$$x(t) = \frac{m}{k}v_0 \cos\alpha_0 \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

Erreichen des Mitspielers:

$$x(t^*) = l$$

$$l = \frac{m}{k}v_0 \cos\alpha_0 - \frac{m}{k}v_0 \cos\alpha_0 \cdot e^{-\frac{kt^*}{m}}$$
$$l + \frac{m}{k}v_0 \cos\alpha_0 e^{-\frac{kt^*}{m}} = \frac{m}{k}v_0 \cos\alpha_0 \quad |\cdot k; -kl$$
$$mv_0 \cos\alpha_0 e^{-\frac{kt^*}{m}} = mv_0 \cos\alpha_0 - kl$$

$$e^{-\frac{kt^*}{m}} = \frac{1}{e^{\frac{kt^*}{m}}}$$

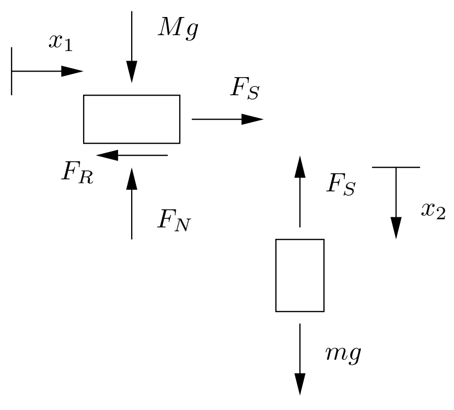
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{e^{\frac{kt^*}{m}}} = \frac{mv_0 \cos\alpha_0 - kl}{mv_0 \cos\alpha_0} \quad |\cdot e^{\frac{kt^*}{m}} \quad \cdot \left(\frac{mv_0 \cos\alpha_0 - kl}{mv_0 \cos\alpha_0}\right)^{-1}$$
$$\frac{mv_0 \cos\alpha_0}{mv_0 \cos\alpha_0 - kl} = e^{\frac{kt^*}{m}} \quad |\cdot \ln$$
$$\Rightarrow t^* = \frac{m}{k}\ln\frac{mv_0 \cos\alpha_0}{mv_0 \cos\alpha_0 - kl}$$

Horizontalkomponente der Geschwindigkeit:

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha_0 e^{-\frac{kt^*}{m}}$$
$$\dot{x}(t^*) = v_0 \cos\alpha_0 e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{m}{k}\ln\left(\frac{mv_0 \cos\alpha_0}{mv_0 \cos\alpha_0 - kl}\right)}$$
$$\dot{x}(t^*) = v_0 \cos\alpha_0 \cdot \frac{(mv_0 \cos\alpha_0 - kl)}{mv_0 \cos\alpha_0}$$
$$\dot{x}(t^*) = v_0 \cos\alpha_0 - \frac{kl}{m}$$

Aufgabe 45

Es gelten die folgenden Annahmen: Das Seil sei undehnbar und masselos. Zudem sind die Rollen reibungsfrei. Der hängende Klotz bewegt sich nach unten, d. h. $\dot{x_2} \geq 0$. In der Ausgangslage sei zudem $x_1(0) = x_2(0) = 0$.



Das NEWTONsche Grundgesetz liefert unter Berücksichtigung der gemachten Annahmen für die Klötze

$$M\ddot{x} = F_S - F_R\ ,$$
$$Mg = F_N\ ,$$
$$m\ddot{x} = mg - F_S\ ,$$

wobei die kinematische Bedingung $x_1 = x_2 = x$ bereits eingearbeitet wurde. Für die Reibung sei das Coulombsche Gesetz angenommen:

$$F_R = \mu F_N\ .$$

Umformen ergibt mit $M = 2m$ die Bewegungsdifferentialgleichung für die untersuchte Bewegung

$$\ddot{x} = \frac{1}{3} g \left(1 - 2\mu\right) \ .$$

Die Gleichung gilt unabhängig davon, ob $\mu = 0$ oder $\mu > 0$.

Lösungsweg 1

Im Bereich AB ist $\mu = 0$. Mit $v\left(0\right) = 0$ erhält man

$$v\left(t\right) = \int_0^t \frac{1}{3} g \, d\bar{t} = \frac{1}{3} g t \quad , \quad 0 \leq t < t_B \ .$$

Im Bereich BC ist $\mu > 0$. Integration ergibt für den Bereich $t \geq t_B$

$$\begin{aligned} v\left(t\right) &= \int_0^t a \, d\bar{t} \\ &= \int_0^{t_B} \frac{1}{3} g \, d\bar{t} + \int_{t_B}^t \frac{1}{3} g \left(1 - 2\mu\right) \, d\bar{t} \\ &= \frac{1}{3} g \left(1 - 2\mu\right) t + \frac{2}{3} g \mu t_B \ . \end{aligned} \tag{64}$$

Der Weg wird nur im Abschnitt BC benötigt. Man erhält durch abermalige Integration für den Bereich $t \geq t_B$

$$\begin{aligned} x\left(t\right) &= \int_0^t v \, d\bar{t} \\ &= \frac{1}{6} g \left(1 - 2\mu\right) t^2 + \frac{2}{3} g \mu t_B t - \frac{1}{3} g \mu t_B^2 \ . \end{aligned} \tag{65}$$

Die Zeit t_B kann man aus der Forderung $x\left(t_B\right) = l$ mittels (65) bestimmen. Man erhält

$$t_B = \sqrt{\frac{6l}{g}} \ .$$

Aus der Forderung, daß die Klötze zur Ruhe kommen, wenn der Klotz M den Punkt C erreicht, d. h. $v\left(t_C\right) = 0$, erhält man mit (64) einen Ausdruck für t_C, der noch von μ abhängt.

$$t_C = \frac{2\mu}{2\mu - 1} \sqrt{\frac{6l}{g}} \ .$$

Schließlich kann man noch die Bedingung $x\left(t_C\right) = 11l$ verwenden und erhält aus (65) den gesuchten Wert

$$\mu = \frac{11}{20} = 0,55 \ .$$

Lösungsweg 2

Der Reibkoeffizient hängt vom Ort ab. Demnach kann die Beschleunigung auch als Funktion des Ortes aufgefaßt werden. Es gilt allgemein:

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} \\ \Leftrightarrow \int a dx &= \int v dv = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) \end{aligned}$$

Da die Bewegung in A aus der Ruhe beginnt ($v_A = 0$) und in C wiederum der Zustand der Ruhe erreicht ist ($v_C = 0$), muß

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{1}{3} g dx + \int_l^{11l} \frac{1}{3} g(1 - 2\mu) dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} g l + \frac{1}{3} g(11l - 22\mu l - l - (-2\mu l)) &= 0 \\ \Leftrightarrow 11 - 20\mu &= 0 \\ \Leftrightarrow \mu &= \frac{11}{20} \end{aligned}$$

gelten.

Anmerkung

Man kann die Aufgabe auch sehr einfach mit dem Arbeitssatz lösen.