Ebene und räumliche Bewegung,
Darstellung über zeitlich veränderliche Basisvektoren

Version vom 18. April 2019

Tutorium

Aufgabe 18

(a) Zusammenhang zwischen b und $\ddot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi} = b \tag{1}$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = bt + C_1, \quad \varphi = \frac{1}{2}bt^2 + C_1 t + C_2 \; .$$

Mit den Randbedingungnen $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ ergibt sich:

$$\dot{\varphi} = bt + \omega_0, \quad \varphi = \frac{1}{2}bt^2 + \omega_0 t \; .$$

Zum Zeitpunkt t_E gilt $\varphi(t_E) = 2\pi$ und $\dot{\varphi}(t_E) = 3\omega_0$:

$$2\pi = \frac{1}{2}bt_E^2 + \omega_0 t_E, \quad 3\omega_0 = bt_E + \omega_0 \; .$$

Aus (2) erhält man die Zeit t_E und die gesuchte Beschleunigung b:

$$t_E = -\frac{\omega_0}{b} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{b}\right)^2 + \frac{4\pi}{b}} \quad \text{oder:} \quad t_E = \frac{2\omega_0}{b} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{b = \frac{2\omega_0^2}{\pi}}} \tag{3}$$

(b) Allgemeine Form der gesuchten Größen:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \tag{4}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi \tag{5}$$

Mit den Ergebnissen ergeben sich die einzelnen Terme zu:

$$\varphi(t) = \frac{\omega_0^2}{\pi}t^2 + \omega_0 t, \tag{6}$$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{2\omega_0^2}{\pi}t + \omega_0, \quad \ddot{\varphi} = \frac{2\omega_0^2}{\pi}. \tag{7}$$

und:

$$r(t) = l\left(1 + \frac{\omega_0^2}{2\pi^2}t^2 + \frac{\omega_0}{2\pi}t\right), \tag{8}$$

$$\dot{r}(t) = l\left(\frac{\omega_0^2}{\pi^2}t + \frac{\omega_0}{2\pi}\right), \quad \ddot{r} = l\frac{\omega_0^2}{\pi^2} \tag{9}$$

Die gesuchten Vektoren sind somit:

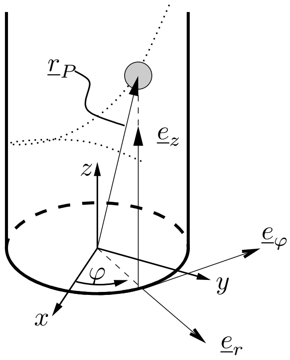
$$\vec{r} = l\left(1 + \frac{\omega_0^2}{2\pi^2}t^2 + \frac{\omega_0}{2\pi}t\right)\vec{e}_r, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= l\left(\frac{\omega_0^2}{\pi^2}t + \frac{\omega_0}{2\pi}\right)\vec{e}_r \\ &+ l\left(1 + \frac{\omega_0^2}{2\pi^2}t^2 + \frac{\omega_0}{2\pi}t\right)\left(\frac{2\omega_0^2}{\pi}t + \omega_0\right)\vec{e}_\varphi,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= l\left[\frac{\omega_0^2}{\pi^2} - \left(1 + \frac{\omega_0^2}{2\pi^2}t^2 + \frac{\omega_0}{2\pi}t\right)\left(\frac{2\omega_0^2}{\pi}t + \omega_0\right)^2\right]\vec{e}_r \\ &+ l\left[2\left(\frac{\omega_0^2}{\pi^2}t + \frac{\omega_0}{2\pi}\right)\left(\frac{2\omega_0^2}{\pi}t + \omega_0\right) + \left(1 + \frac{\omega_0^2}{2\pi^2}t^2 + \frac{\omega_0}{2\pi}t\right)\frac{2\omega_0^2}{\pi}\right]\vec{e}_\varphi.\end{aligned} \tag{12}$$

Aufgabe 20

Bestimmung des Ortsvektors:



Ganz allgemein gilt: Der Ortsvektor eines Punktes P in Zylinderkoordinaten lautet:

$$\underline{r}_P(t) = r(t)\underline{e}_r(t) + z(t)\underline{e}_z \tag{13}$$

In dieser Aufgabe ist

$$r(t) = R = \text{const} \tag{14}$$

$z(t)$ erhalten wir aus $z(\varphi) = l_0 e^{k\varphi}$ und $\varphi(t) = \omega t$ (siehe Aufgabenstellung):

$$z(t) = l_0 e^{k\omega t} \tag{15}$$

Wir setzen $z(t)$ aus Gleichung (15) und $r(t)$ aus Gleichung (14) in die Ausgangsgleichung (13) für die Bestimmung des Ortsvektors des Punktes P in Zylinderkoordinaten ein. Dann erhalten wir als <u>Ortsvektor des Punktes Paul</u> :

$$\underline{r}_P(t) = R\underline{e}_r(t) + l_0 e^{k\omega t}\underline{e}_z \tag{16}$$

Bestimmung des Geschwindigkeitsvektors: Der Geschwindigkeitsvektor des Punktes ist gleich der ersten zeitlichen Ableitung des Ortsvektors :

$$\begin{aligned}\underline{v}_P(t) &= \frac{d}{dt}\underline{r}_P(t) = \frac{d}{dt}\Big[R\underline{e}_r\Big] + \frac{d}{dt}\Big[l_0 e^{k\omega t}\underline{e}_z\Big] \\ &= R\frac{d}{dt}\underline{e}_r + l_0\underline{e}_z\frac{d}{dt}\Big[e^{k\omega t}\Big] \\ &= R\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + l_0 k\omega e^{k\omega t}\underline{e}_z\end{aligned}$$

Mit $\dot{\varphi}(t) = \omega$ ergibt sich der <u>Geschwindigkeitsvektor</u>

$$\underline{v}_P(t) = R\omega\underline{e}_\varphi + l_0 k\omega e^{k\omega t}\underline{e}_z \tag{17}$$

Bestimmung des Beschleunigungsvektors: Der Beschleunigungsvektor ist gleich der ersten Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit :

$$\begin{aligned}\underline{a}_P(t) &= \frac{d}{dt}\underline{v}_P(t) = \frac{d}{dt}\Big[R\omega\underline{e}_\varphi + l_0 k\omega e^{k\omega t}\underline{e}_z\Big] \\ &= \frac{d}{dt}\Big[R\omega\underline{e}_\varphi\Big] + \frac{d}{dt}\Big[l_0 k\omega e^{k\omega t}\underline{e}_z\Big]\end{aligned}$$

Mit

$$\frac{d}{dt}\underline{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\underline{e}_r = -\omega\underline{e}_r$$

erhalten wir den <u>Beschleunigungsvektor</u>:

$$\underline{a}_P(t) = -R\omega^2\underline{e}_r + l_0 k^2\omega^2 e^{k\omega t}\underline{e}_z \tag{18}$$

Die Basisvektoren $\underline{e}_r$ und $\underline{e}_\varphi$ lassen sich mit den kartesischen Basisvektoren $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$ darstellen:

$$\underline{e}_r = \underline{e}_x\cos\varphi + \underline{e}_y\sin\varphi \text{ und}$$

$$\underline{e}_\varphi = \underline{e}_x(-\sin\varphi) + \underline{e}_y\cos\varphi$$

Mit $\varphi = \omega t$ ergibt sich:

$$\underline{e}_r = \underline{e}_x \cos(\omega t) + \underline{e}_y \sin(\omega t) \text{ und}$$
$$\underline{e}_\varphi = \underline{e}_x(-\sin\omega t) + \underline{e}_y \cos(\omega t)$$

Durch Einsetzen in die Gleichungen (16), (17) und (18) erhält man die Darstellung in kartesischen Koordinaten, hier z.B. die Beschleunigung:

$$\begin{aligned}\underline{a}_P(t) = \underline{e}_x(-R\omega^2\cos\omega t)\\ +\underline{e}_y(-R\omega^2\sin\omega t)\\ +\underline{e}_z l_0 k^2\omega^2 e^{k\omega t}\ .\end{aligned}$$

Beide Darstellungen sind offensichtlich äquivalent!

Hausaufgaben

Aufgabe 16

(a) Da wir später die Zeitableitungen der radialen Koordinate $r\,(t)$ und des Winkels $\varphi\,(t)$ benötigen, berechnen wir diese vorab:

$$r = l\left(1-\kappa t^2\right) \qquad \dot r = -2\kappa t l \qquad \ddot r = -2\kappa l$$
$$\varphi = \kappa t^2 \qquad \dot\varphi = 2\kappa t \qquad \ddot\varphi = 2\kappa$$

Der Ortsvektor dargestellt in der polaren Basis $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\varphi$ lautet:

$$\underline{r}(t) = r(t)\underline{e}_r = l\left(1-\kappa t^2\right)\underline{e}_r$$

Die erste Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeit:

$$\underline{v}(t) = \dot r\underline{e}_r + r\dot\varphi\underline{e}_\varphi$$
$$\underline{v}(t) = -2\kappa t l\underline{e}_r + l\left(1-\kappa t^2\right)2\kappa t\underline{e}_\varphi$$

Wiederum ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit die Beschleunigung:

$$\begin{aligned}\underline{a}(t) &= \left(\ddot r - r\dot\varphi^2\right)\underline{e}_r + \left(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi\right)\underline{e}_\varphi\\ \underline{a}(t) &= \left(-2\kappa l - l\left(1-\kappa t^2\right)4\kappa^2t^2\right)\underline{e}_r\\ &\quad + \left(l\left(1-\kappa t^2\right)2\kappa + 2(-2\kappa t l)2\kappa t\right)\underline{e}_\varphi\\ &\quad = 2\kappa l\left(2\kappa^2t^4 - 2\kappa t^2 - 1\right)\underline{e}_r + 2\kappa l\left(1-5\kappa t^2\right)\underline{e}_\varphi\end{aligned}$$

(b) Wir ermitteln zuerst die Zeit t_1, die vergeht, bis der Winkel $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ erreicht wird:

$$\varphi_1 = \kappa t_1^2 = \frac{\pi}{4} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{\pi}{4\kappa}}$$

Der Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}_1$ zu diesem Zeitpunkt lautet:

$$\begin{aligned}\underline{v}_1 &= -2\kappa t_1 l\underline{e}_r + l\left(1-\kappa t_1^2\right)2\kappa t_1\underline{e}_\varphi\\ &= -2\kappa\sqrt{\frac{\pi}{4\kappa}}l\underline{e}_r + l\left(1-\kappa\frac{\pi}{4\kappa}\right)2\kappa\sqrt{\frac{\pi}{4\kappa}}\underline{e}_\varphi\\ \underline{v}_1 &= -\sqrt{\kappa\pi}l\underline{e}_r + l\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\kappa\pi}\underline{e}_\varphi\end{aligned}$$

Für den Betrag der Geschwindigkeit v_1 ergibt sich damit:

$$v_1 = \mid\underline{v}_1\mid = \sqrt{\left(-\sqrt{\kappa\pi}l\right)^2 + \left(l\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\kappa\pi}\right)^2}$$
$$v_1 = \sqrt{\kappa\pi l^2\left(1+\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^2\right)}$$

(c) Wenn der Körper den Ursprung O erreicht, gilt $r\,(t_E) = 0$, woraus folgt

$$l\left(1-\kappa t_E^2\right)=0$$
$$\left(1-\kappa t_E^2\right)=0 \qquad \Rightarrow \qquad t_E=\sqrt{\frac{1}{\kappa}}$$

Sinnvoll ist nur der positive Wert für t_E

$$\varphi_E=\kappa t_E^2=\kappa\frac{1}{\kappa}$$
$$\varphi_E=1$$

Aufgabe 21

(a) Ortsvektor zum Punkt P in Zylinderkoordinaten $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\varphi$, $\underline{e}_z$.

$$\underline{r}_p=\big(L-s(t)+b\sin\alpha(t)\big)\underline{e}_r+\big(H-h-b\cos\alpha(t)\big)\underline{e}_z \tag{19}$$

Einsetzen: $s(t)=v_0t$ und $\alpha(t)=\Omega t$

$$\underline{r}_p=\big(L-v_0t+b\sin\Omega t\big)\underline{e}_r+\big(H-h-b\cos\Omega t\big)\underline{e}_z \tag{20}$$

(b) Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}_p=\dot{\underline{r}}_p$;

$$\begin{aligned}\dot{\underline{r}}_p=&\ \dot{\overline{\big(L-v_0t+b\sin\Omega t\big)}}\underline{e}_r+\big(L-v_0t+b\sin\Omega t\big)\dot{\underline{e}}_r\\&+\dot{\overline{\big(H-h-b\cos\Omega t\big)}}\underline{e}_z+\big(H-h-b\cos\Omega t\big)\dot{\underline{e}}_z\end{aligned} \tag{21}$$

$$\text{mit}\quad \dot{\underline{e}}_r=\dot\varphi\underline{e}_\varphi\ ,\quad \dot{\underline{e}}_\varphi=-\dot\varphi\underline{e}_r\ ,\quad \dot{\underline{e}}_z=0$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{r}}_p=&\ \big(-v_0+b\Omega\cos\Omega t\big)\underline{e}_r+\big(L-v_0t+b\sin\Omega t\big)\omega\underline{e}_\varphi\\&+\big(b\Omega\sin\Omega t\big)\underline{e}_z\end{aligned} \tag{22}$$

(c) Beschleunigungsvektor $\underline{a}_p=\ddot{\underline{r}}_p$;

$$\begin{aligned}\ddot{\underline{r}}_p=&\ \big(-b\Omega^2\sin\Omega t\big)\underline{e}_r+\big(-v_0+b\Omega\cos\Omega t\big)\dot\varphi\underline{e}_\varphi\\&+\big(-v_0+b\Omega\cos\Omega t\big)\dot\varphi\underline{e}_\varphi+\big(L-v_0t+b\sin\Omega t\big)\ddot\varphi\underline{e}_\varphi\\&+\big(L-v_0t+b\sin\Omega t\big)\dot\varphi\big(-\dot\varphi\big)\underline{e}_r+\big(b\Omega^2\cos\Omega t\big)\underline{e}_z\end{aligned} \tag{23}$$

$$\dot\varphi=\omega=const. \quad \Rightarrow \quad \ddot\varphi=0$$

$$\begin{aligned}\ddot{\underline{r}}_p=&\ \Big[-b\Omega^2\sin\Omega t+\omega^2\big(-L+v_0t-b\sin\Omega t\big)\Big]\underline{e}_r\\&+\Big[2\omega\big(-v_0+b\Omega\cos\Omega t\big)\Big]\underline{e}_\varphi+\big(b\Omega^2\cos\Omega t\big)\underline{e}_z\end{aligned} \tag{24}$$